

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Maandag 10 januari 2011, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1 a.(10) Bepaal de algemene oplossing van de tweede orde differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + y = e^t + t. \quad (1)$$

De algemene oplossing $y(t)$ wordt gegeven door $y(t) = y_{hom}(t) + y_{part}(t)$, waarbij $y_{hom}(t)$ een oplossing is van de homogene vergelijking en $y_{part}(t)$ een particuliere oplossing is. De oplossingen van homogene vergelijking worden gegeven door invullen van $y_{hom}(t) = e^{rt}$. Hieruit vinden we de karakteristieke vergelijking

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0,$$

met oplossing $r = 1$, ($2\times$). De homogene oplossing is dus $y_{hom}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$. Een particuliere oplossing vind je het makkelijkst door $y_{part}(t) = At^2 e^t + D + Et$ te substitueren in de differentiaalvergelijking. Hieruit volgt dan direct dat $A = 1/2, D = 2, E = 1$. Dus $y(t) = t + 2 + \frac{1}{2}t^2 e^t + C_1 e^t + C_2 t e^t$ met C_1, C_2 willekeurige constanten in $\mathbf{R}$ is de gezochte algemene oplossing.

b.(10) Geef de algemene oplossing van de DV

$$(1 - t^2)u'' - 2tu' + 2u = 0. \quad (2)$$

Gegeven is dat $u(t) = t$ een oplossing is. Invullen leert inderdaad dat dit klopt. Een andere (lineair onafhankelijke) oplossing kan gevonden worden d.m.v. *orde reductie*. Schrijf $y(t) = tv(t)$ voor de 2-de lin. onafh. opl. Invullen in de DV levert een DV voor v op:

$$v'' = v' \left[\frac{2 - 4t^2}{(1 - t^2)t} \right] = v' \left[\frac{1}{1 - t} - \frac{1}{1 + t} - \frac{2}{t} \right] \quad (3)$$

Dus $v'(t) = \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] + \frac{1}{t^2}$. Integreren geeft:

$$v(t) = -\frac{1}{2} \log(1 - t) + \frac{1}{2} \log(1 + t) - \frac{1}{t}. \quad (4)$$

En de algemene oplossing is dus $u(t) = C_1 t + C_2 t \left[-\frac{1}{2} \log(1 - t) + \frac{1}{2} \log(1 + t) \right] - C_2$.

2. De Chebyshev differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(t)$ wordt gegeven door:

$$(1 - t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0, \quad (5)$$

met α een reële parameter.

- a. (5) Is $t = 0$ singulier punt? Geef alle singuliere punten van deze diff vergl.
 $t = 0$ is een regulier punt, omdat alle coëfficiënten ongelijk 0 zijn in dit punt. De enige regulier singuliere punten zijn $t = \pm 1$.
- b. (5) Geef recurrente betrekking voor de coëfficiënten van machtreeks oplossing rond 0. Invullen van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ in (3) geeft

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - 2t \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \\ \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + (\alpha^2 - n^2)a_n] t^n = 0. \end{aligned}$$

Hieruit kun je direct aflezen dat

$$a_{n+2} = \left[\frac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} \right] a_n, \quad \text{voor alle } n \geq 0$$

- c. (5) Geef de convergentiestraal van de onder (a) gevonden machtreeks en laat zien dat de algemene oplossing $y(t)$ geschreven kan worden als $y(t) = a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t)$ waarbij $y_1(t)$ een even en $y_2(t)$ een oneven functie van t is en a_0, a_1 willekeurige constanten zijn.

Merk op dat de convergentiestraal van deze machtreeks 1 is, dus de oplossing bestaat voor alle $t \in (-1, 1)$, want

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = 1. \quad (6)$$

Uit de gevonden recurrente betrekking volgt meteen dat a_2 wordt bepaald door a_0 en a_3 door a_1 . In het algemeen zijn de even machten met elkaar verbonden door de relatie

$$a_{2k+2} = \left[\frac{4k^2 - \alpha^2}{(2k+1)(2k+2)} \right] a_{2k}, \quad \text{voor alle } k \geq 0. \quad (7)$$

De oneven-machten voldoen aan

$$a_{2k+3} = \left[\frac{(2k+1)^2 - \alpha^2}{(2k+2)(2k+3)} \right] a_{2k+1}, \quad \text{voor alle } k \geq 0. \quad (8)$$

Daarom geldt

$$y_1(t) = a_0 \left(1 - t^2 \frac{\alpha^2}{2!} + t^4 (4 - \alpha^2)(-\alpha^2)/4! + \dots \right) \quad (9)$$

en

$$y_2(t) = a_1 \left(t - t^3 \frac{(1 - \alpha)^2}{3!} + t^5 (1 - \alpha^2)(9 - \alpha^2)/5! + \dots \right). \quad (10)$$

Omdat de twee oplossingen lineair onafhankelijk zijn, immers $y_1(t) = y_1(-t)$ and $y_2(t) = -y_2(-t)$, dus kunnen geen veelvoud van elkaar zijn, is de algemene oplossing van de gevraagde vorm.

Laat nu $\alpha = m$ met m een natuurlijk getal.

d. (5) Geef de polynomiale oplossingen voor $\alpha = 0, 1, 2$.

Uit (6) volgt meteen dat als m een even getal dat dan de reeks met de even machten van t afbreekt, want voor zekere gehele $n = m$ wordt $a_n = 0$. Voor oneven m volgt dat voor zekere gehele $n = m$, $a_n = 0$. In dit geval breekt dus de reeks met oneven machten af.

Het geval $\alpha = 0$ is makkelijk. Dan is $a_2 = 0$ en de even reeks breekt dus af. Kies $a_1 = 0$, want je zoekt een polynomiale oplossing. Dus $P_0(t) = a_0$. In het geval $\alpha = 1$ is $a_3 = 0$. De oneven reeks breekt dus af. Omdat we een polynomiale oplossing willen kiezen we in dit geval $a_0 = 0$. $P_1(t) = a_1 t$. Als $\alpha = 2$ Dan is $a_2 = -2a_0$ en $a_4 = 0$; dus de even reeks breekt weer af. We kiezen nu opnieuw $a_1 = 0$ en dit geeft $P_2(t) = a_0(1 - 2t^2)$.

3.(15) De matrix A behorende bij het stelsel $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ is een reële 3×3 matrix die gegeven door.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix A heeft eigenwaarde 1 met multipliciteit 3. Dus $A = I + N$ met N gegeven door

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Omdat I commuteert met N kunnen we heel simpel een fundamentele matrix bepalen voor het stelsel differentiaalvergelijkingen, namelijk $e^{At} = e^{It+Nt} = e^t \left(I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} \right)$. Alle hogere machten van N verdwijnen omdat N nilpotent is ($N^3 = 0$). We vinden dan e^{At} gegeven wordt door

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & -te^t \\ -te^t & e^t & -te^t + \frac{t^2 e^t}{2} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

4. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen in $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{11}$$

Hierin zijn $f_1(x_1, x_2)$ en $f_2(x_1, x_2)$ gedefinieerd door

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right), \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right), \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0).\end{aligned}$$

en $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$.

a.(5) Vind alle reële evenwichtspunten van het stelsel (5).

Je kunt direct zien dat $(0, 0)$ een evenwichtspunt is. Verder blijkt dat dit ook het enige evenwichtspunt is, want $x_1 = 0$ impliceert $x_2 = 0$ en vice versa. In het geval $x_1 x_2 \neq 0$ kun je de f_1 met x_1 vermenigvuldigen en f_2 met x_2 . Optellen geeft dan dat $x_1^2 + x_2^2 = 0$, en dit heeft geen oplossingen als $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

b.(5) Lineariseer (5) rond de onder (a) gevonden evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (stabiel/instabiel/asymptotisch stabiel) van elk van de evenwichtspunten in het gelin-eariseerde stelsel en geef aan of het een knoop, zadel, focus of centrum betreft.

Lineariseren betekent in dit geval gewoon alle niet-lineaire termen verwaarlozen. We krijgen dan het stelsel:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dit is de vergelijking voor een centrum. De eigenwaarden van de matrix zijn $\pm i$. Het centrum is een stabiele oplossing voor het lineaire stelsel. Voor het niet-lineaire stelsel kunnen we nog geen uitspraak doen.

c.(10) Vind de limietcycles van dit systeem en schets het faseportet.

Hint: schrijf het systeem eerst om naar poolcoördinaten.

Omschrijven naar poolcoördinaten:

$$x_1(t) = r(t) \cos \phi(t)\tag{12}$$

$$x_2(t) = r(t) \sin \phi(t)\tag{13}$$

Dit invullen in het oorspronkelijke stelsel (11) geeft

$$\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi} = -r \sin \phi + r^3 \cos \phi \sin\left(\frac{\pi}{r}\right),\tag{14}$$

$$\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi} = -r \cos \phi + r^3 \sin \phi \sin\left(\frac{\pi}{r}\right),\tag{15}$$

Oplossen van deze vergelijkingen naar r en ϕ levert op

$$\dot{r} = r^3 \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)\tag{16}$$

$$\dot{\phi} = 1.\tag{17}$$

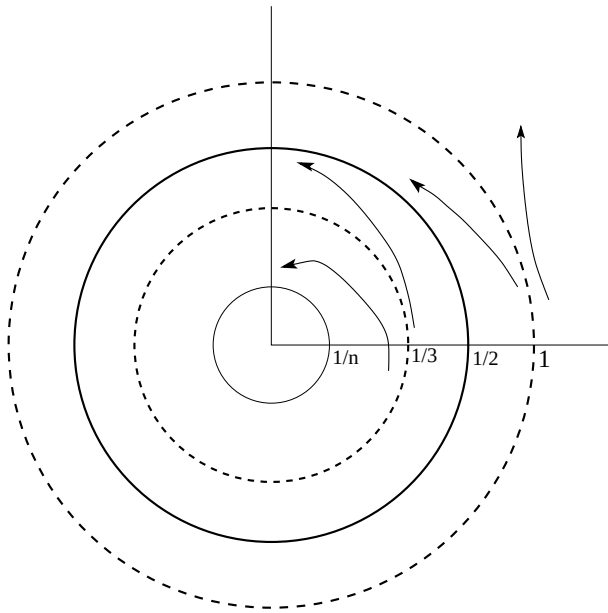


Figure 1: Figuur van de periodieke banen. De stabiele banen (dik getekend) en de onstabiele banen (onderbroken lijnen) wisselen elkaar af.

Er zijn dus oneindig veel periodieke oplossingen (limietcycles). Met hun straal gegeven door $R = 1/n$, waarbij $n = 1, 2, 3, \dots$; zie onderstaande figuur.

5. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor de reële functie $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ die voldoet aan

$$y' = \sqrt{|y|} + \epsilon$$

en beginwaarde $y(t_0) = 0$ met $\epsilon > 0$ een constante.

- a. (5) Geef een oplossing van het bovenstaande beginwaardeprobleem.

Merk op dat als $t > t_0$, $y(t) > 0$, want $y' > 0$ en de functie $y(t)$ is continu. Bovendien geldt voor $t < t_0$ dat $y(t) < 0$. De differentiaalvergelijking is ook separabel, dus we kunnen schrijven:

$$\frac{y'}{\sqrt{|y|} + \epsilon} = 1.$$

Beschouw eerst $t > t_0$. Dus we zoeken een functie $F(y)$ zodanig dat $\frac{dF(y(t))}{dt} = 1$ en $F(y(t_0)) = 0$. Deze functie is natuurlijk

$$F(y) = \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{\xi} + \epsilon}.$$

Door nu $z^2 = \xi$ te nemen kun je de integraal uitvoeren.

$$F(y) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{2zdz}{z + \epsilon} = 2\sqrt{y} - 2\epsilon \log[\sqrt{y} + \epsilon] + 2\epsilon \log[\epsilon] = 2\sqrt{y} - 2\epsilon \log\left[1 + \frac{\sqrt{y}}{\epsilon}\right]$$

$F(y) = t - t_0$ definieert nu de oplossing. Het geval $t < t_0$ gaat identiek. Je verkrijgt dan de relatie

$$2\sqrt{-y} - 2\epsilon \log\left[1 + \frac{\sqrt{-y}}{\epsilon}\right] = t_0 - t$$

- b. (5) Is deze oplossing uniek? Waarom wel/niet?

De gevonden oplossing is *uniek*. De gevonden impliciete functie is namelijk een functievoorschrift voor t als functie van y . Dus snijden is niet mogelijk. Ihb is er voor $y = 0$ precies 1 waarde van t namelijk t_0 . De existentie en eenduidigheidsstelling laat ook zien dat buiten de lijn $y = 0$ de oplossingen eenduidig zijn, maar kan niet worden toegepast op $y = 0$ omdat dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ divergeert. Dit kun je ook zien aan de integraal die de functie F definieert. Deze is overal goed gedefinieerd.

c. (5) Geef een oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y' = \frac{y^2}{y^2 + \epsilon^2} \sqrt{|y|}$$

met beginwaarde $y(t_0) = 0$, met $\epsilon > 0$.

Er is direct in te zien dat $y = 0$ een oplossing is.

d. (3) Is deze oplossing uniek? Waarom wel/niet?

Ja, de oplossing is *uniek*. Dit volgt uit de existentie- en eenduidigheidsstelling. Aan de voowaarde dat $\frac{\partial f}{\partial y}$ een continue functie is op het interval $[-a, a]$ wordt voldaan.

e. (2) Neem nu $\epsilon = 0$, dus

$$y' = \sqrt{|y|}$$

met $y(t_0) = 0$. Geef een oplossing van dit beginwaardeprobleem.

De functie $y = 0$ is opnieuw een oplossing.

f. (5) Is de onder (e) gevonden oplossing uniek? Zo ja geef aan waarom, zo nee geef een andere oplossing.

De oplossing is in dit geval *niet uniek*! De existentie en eenduidigheidsstelling is in dit geval weer niet te gebruiken omdat $\frac{\partial f}{\partial y}$ divergeert voor $y \rightarrow 0$. Je kunt de DV wel oplossen door te separeren. Dit geeft als oplossing

$$y(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^2}{4} & t > t_0 \\ -\frac{(t-t_0)^2}{4} & t \leq t_0 \end{cases} \quad (18)$$

Je kunt oneindig veel oplossingen maken die aan de randvoorwaarde $y(t_0) = 0$ voldoen door te combineren met de $y \equiv 0$ oplossing.