

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Maandag 12 april 2010, 14.00-17.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1 a.(10) Bepaal de algemene oplossing van de tweede orde differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + y = \cos(x). \quad (1)$$

b.(10) Geef de algemene oplossing van

$$u'' - 4xu' + (4x^2 - 2)u = 0, \quad (2)$$

waarbij gegeven is dat $u(x) = e^{x^2}$ een oplossing van (2) is.

2. De Laguerre differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ wordt gegeven door:

$$xy'' + (1 - x)y' + \alpha y = 0, \quad (3)$$

met α een reële parameter.

- a. (5) Is $x = 0$ een regulier of singulier punt van deze vergelijking ? Zijn er (nog meer) singuliere punten?

Neem vanaf nu α gelijk aan een geheel getal groter of gelijk 0.

- b. (5) Vind een niet-triviale oplossing van de vorm $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ van (3), door een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n af te leiden.

Een van $y_1(x)$ lineair onafhankelijke oplossing van (3) wordt gegeven door $y_2(x) = y_1(x) \log(x) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

- c. (5) Zijn de oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$ begrensd voor $x \rightarrow 0$?
- d. (5) Geef expliciet de *polynomiale oplossingen* die voldoen aan $y(0) = 1$, voor $\alpha = 0, 1, 2$. Deze oplossingen worden Laguerre polynomen genoemd en spelen een belangrijke rol in de quantummechanica.

3.(15) We bekijken het volgende 3 dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2.\end{aligned}\tag{4}$$

Geef een fundamentele matrix behorend bij het stelsel (4).

4. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel (Volterra-Lotka) in $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - 2x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2 - 2x_1)\end{aligned}\tag{5}$$

- a.(10) Vind alle reële evenwichtspunten van het stelsel (5).
- b.(10) Lineariseer (5) rond de onder (a) gevonden evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (stabiel/instabiel/asymptotisch stabiel) van elk van de evenwichtspunten in het gelineariseerde stelsel en geef aan of het een knoop, zadel, focus of centrum betreft.
- c. (5) Wat kun je concluderen over de stabiliteit van de evenwichtspunten van het oorspronkelijke niet-lineaire stelsel (5) en wat is de biologische interpretatie van de stabiliteitsanalyse gegeven dat $x_1(t), x_2(t)$ populaties voorstellen?

5. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor de reële vectorfunctie $\mathbf{y}(x)$ met $\mathbf{y}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$$

met $\|f(x, \mathbf{y})\| \leq \beta \|\mathbf{y}\|$ voor zekere $\beta > 0$. Hierin is $\|\cdot\|$ de Euclidische norm ($\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$), en f een C^∞ functie.

- a.(10) Laat zien dat $\|\mathbf{y}(x)\| \leq \|\mathbf{y}(0)\| e^{2\beta x}$ voor alle $x \geq 0$.

Hint: Leid eerst af dat $\frac{d}{dx} \|\mathbf{y}(x)\|^2 \leq 4\beta \|\mathbf{y}(x)\|^2$.

- b. (5) Laat zien dat als $f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y}$, de volgende ongelijkheid geldt:

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq \|\mathbf{y}(0)\| e^{4\sqrt{6}x} \text{ voor alle } x \geq 0.$$

- c. (5) Los de differentiaalvergelijking $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$ met $f(x, \mathbf{y})$ als in (b) op, en bepaal $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x)$.