

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Maandag 11 januari 2010, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1 a. (5) Is de differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ en gegeven door

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad (1)$$

exact ? Waarom wel/niet ?

b.(10) Vind een impliciete uitdrukking voor de oplossingskrommen van (1). Gebruik indien nodig een integrerende factor.

2. De Legendre differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ wordt gegeven door:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad (2)$$

met α een reële parameter.

- a. (5) Is $x = 0$ een regulier of singulier punt van deze vergelijking ? Zijn er (nog meer) singuliere punten?
- b. (5) Vind door substitutie van de machtreeks $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in (2) een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n . Wat is de convergentiestraal van de machtreeks?
- c. (5) Geef twee lineair onafhankelijke oplossingen $y_1(x)$, $y_2(x)$ van de Legendre differentiaalvergelijking.
- d. (5) Geef expliciet de polynomiale oplossing die voldoet aan $y(1) = 1$, voor $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

3. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$

$$y' = 3y^{2/3},$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 0$ op de verzameling $x \geq 0$.

- a. (5) Geef een oplossing van het bovenstaande beginwaardeprobleem.
- b.(10) Zijn er meerdere oplossingen? Zo ja, geef een andere oplossing; zo nee, waarom is er maar 1 oplossing?

4. We bekijken het volgende 4 dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_4.\end{aligned}\tag{3}$$

(15) Geef de algemene oplossing van het stelsel (3). Bestaat deze voor alle $t \in \mathbf{R}$?

5. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_1)\end{aligned}\tag{4}$$

- a. (5) Vind alle evenwichtspunten van (4).
- b.(10) Lineariseer (4) rond de onder (a) gevonden evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (stabiel/instabiel/asymptotisch stabiel) van elk van de evenwichtspunten in het gelin-eariseerde stelsel en geef aan of het een knoop, zadel, focus of centrum betreft.
- c. (5) Wat kun je concluderen over de stabiliteit van de evenwichtspunten van het oorspronke-lijke niet-lineaire stelsel (4) ?

6. (15) Laat zien dat alle oplossingen van de tweede orde differentiaalvergelijking voor $z(t)$:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + ze^{z^2} = z,$$

periodiek zijn.

Hint: Schrijf de differentiaalvergelijking eerst om naar een stelsel en bereken vervolgens de banen.