

Uitwerking Tentamen Analyse 3, WI 2601

Maandag 11 januari 2010, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
-

1 a. (5) De differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ en gegeven door

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad (1)$$

is niet exact, want $\frac{\partial(3xy+y^2)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x^2+xy)}{\partial x}$.

b.(10) Om een oplossing te vinden van (1) maken we (1) eerste exact d.m.v. een integrerende factor $M(x)$. De vergelijking voor $M(x)$ is:

$$\frac{\partial[M(x)(3xy + y^2)]}{\partial y} = \frac{\partial[M(x)(x^2 + xy)]}{\partial x}.$$

Oplossen voor $M(x)$ geeft als integrerende factor bijv. $M(x) = x$.

Daarna kun je DV (1) oplossen in impliciete vorm, zeg $E(x, y) = \text{const}$, door de volgende twee vergelijkingen op te lossen:

$$\frac{\partial E(x, y)}{\partial x} = x(3xy + y^2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial E(x, y)}{\partial y} = x(x^2 + xy) \quad (3)$$

Integreren van de eerste vergelijking naar x geeft $E(x, y) = x^3y + \frac{y^2x^2}{2} + F(y)$, met F een willkeurige functie van y . Deze expressie voor $E(x, y)$ vervolgens invullen in de tweede vergelijking geeft $\frac{dF}{dy} = 0$, dus F is een constante. De oplossing van (1) is derhalve

$$E(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = \text{const.}$$

2. De Legendre differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ wordt gegeven door:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad (4)$$

met α een reële parameter.

- a. (5) $x = 0$ een regulier punt van (2), want de coefficient voor y'' is voor $x = 0$ ongelijk aan 0. De punten $x = \pm 1$ zijn (regulier) singuliere punten, want deze punten zijn enkelvoudige nulpunten van de coefficient die voor y'' staat.

- b. (5) Substitueer $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in (2). Daaruit volgt de recurrente betrekking:

$$a_{n+2} = a_n \left[\frac{n(n+1) - \alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)} \right] \quad (5)$$

De convergentiestraal R kun je bepalen uit $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right|$. Deze limiet is gelijk aan 1, dus $R = 1$.

- c. (5) Uit de recurrente betrekking gevonden in (b) zien we direct dat de oplossingen bestaan uit twee machtreeksen, waarvan de ene ($y_1(x)$) alleen uit even machten van x bestaat en de andere ($y_2(x)$) alleen uit oneven machten van x bestaat. Deze oplossingen zijn natuurlijk lineair onafhankelijk. Dit kun je laten zien met de Wronskiaan of door op te merken dat een reeks met even machten van x nooit een veelvoud kan zijn van een reeks met oneven machten van x .

De reeks met de even machten krijg je door $a_1 = 0$ te nemen en a_0 willekeurig. Dit geeft dan

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}. \\ a_4 &= a_2 \frac{2.3 - \alpha(\alpha+1)}{3.4} = -a_0 \frac{(2.3 - \alpha(\alpha+1))\alpha(\alpha+1)}{4!}. \\ y_1(x) &= a_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)x^2}{2} - \frac{(2.3 - \alpha(\alpha+1))\alpha(\alpha+1)}{4!}x^4 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

De reeks voor oneven machten wordt verkregen door $a_0 = 0$ te nemen en a_1 willekeurig.

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 \left[\frac{2 - \alpha(\alpha+1)}{3.2} \right]. \\ a_5 &= a_3 \left[\frac{3.4 - \alpha(\alpha+1)}{5.4} \right] = a_1 \left[\frac{(2 - \alpha(\alpha+1))(3.4 - \alpha(\alpha+1))}{5!} \right]. \end{aligned}$$

Dus $y_2(x)$ ziet er nu uit als

$$y_2(x) = a_1 \left\{ x + \left[\frac{2 - \alpha(\alpha+1)}{3.2} \right] x^3 + \left[\frac{(2 - \alpha(\alpha+1))(3.4 - \alpha(\alpha+1))}{5!} \right] x^5 + \dots \right\}. \quad (7)$$

De algemene oplossing is nu $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, waarbij a_0 en a_1 uit (6) en (7) nog willekeurig gekozen kunnen worden.

- d. (5) De polynomiale oplossing die voldoet aan $y(1) = 1$, voor $\alpha = 0, 1, 2, 3$, kun je direct aflezen uit onderdeel c). Als $\alpha = 0$ dan zie uit formule (6) uit onderdeel c) dat $y_1(x) = a_0$. $y_2(x)$ is niet polynomiaal, dus $a_1 = 0$ en de beginvoorwaarde $y(1) = 1$ geeft $a_0 = 1$ en de gezochte polynomiale oplossing is dus $P_0(x) = 1$.

$\alpha = 1$, geeft $a_0 = 0$ en $a_1 = 1$, dus $P_1(x) = x$.

Voor $\alpha = 2$, moeten we opnieuw $a_1 = 0$ kiezen, en $y_1(x) = a_0(1 - 3x^2)$. De beginvoorwaarde geeft nu $a_0 = -\frac{1}{2}$ en $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$.

Voor $\alpha = 3$ nemen we weer $a_0 = 0$ en we vinden $y_2(x) = a_1(x - \frac{3x^3}{5})$. Uit de beginvoorwaarde volgt nu dat $a_1 = -\frac{3}{2}$ en $P_3(x) = \frac{-3x+5x^3}{2}$.

3. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$

$$y' = 3y^{2/3},$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 0$ op de verzameling $x \geq 0$.

- a. (5) Een oplossing van dit beginwaarde probleem is de functie y gedefinieerd op $x \geq 0$ met $y(x) = 0$.
- b.(10) Er zijn in dit geval meerdere oplossingen. Omdat de functie met voorschrift $y^{2/3}$ niet differentieerbaar is in $y = 0$, kunnen we de existentie en eenduidigheidsstelling van Picard-Lindelöf niet toepassen. Het is eenvoudig een andere oplossing te construeren die aan de beginvoorwaarden voldoet door op te merken dat de vergelijking $y' = 3y^{2/3}$, separabel is. Door te integreren

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = 3 \int dx$$

vinden we dat $y(x) = (x+C)^3$ een familie oplossingen is. Hierin is C een willekeurige integratie constante. Je kunt nu oneindig veel oplossingen geven die door $(0,0)$ gaan, door $y(x) = 0$ op een gladde manier vast te knopen aan $y(x) = (x+C)^3$. Als $C = -1$ dan geldt bijv. dat

$$\begin{aligned} y(x) &= 0, & x &\in [0, 1] \\ y(x) &= (x-1)^3, & x &> 1 \end{aligned}$$

een andere C^∞ oplossing is. Natuurlijk is $y(x) = x^3$ ook een oplossing.

4. We bekijken het volgende 4 dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_4. \end{aligned} \tag{8}$$

(15) Dit is een lineair stelsel dat je makkelijk kunt schrijven als

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x},$$

met A een vierdimensionale matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$ wordt gegeven door $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$. Dus je hoeft alleen maar e^{At} uit te rekenen. In dit geval gaat dat makkelijk, want je kunt A splitsen in een diagonale matrix S en een nulpotent stuk N , die onderling commuteren, d.w.z. $SN = NS$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S + N$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} (I + Nt),$$

want $N^2 = 0$. De algemene oplossing is dus

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & -te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 & te^t \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0.$$

Deze opgave kun je ook maken door op te merken dat de eigenwaarde 1 multiplicititeit 4 heeft en vervolgens de generaliseerde eigenvectoren uit de rekenen. De eigenvectoren in $\mathbf{R}^4$ zijn dan:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en de generaliseerde eigenvectoren $\mathbf{v}$ worden bepaald door $(A - I)^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Mogelijke vectoren die hieraan voldoen en onafhankelijk zijn van $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ zijn $\mathbf{e}_3$ en $\mathbf{e}_4$.

Een derde manier is het uitrekenen van de Jordan normaalvorm. Ook is het mogelijk, om de vergelijking direct op te lossen. Eerst x_4 uitrekenen, dan x_3 enzovoort.

5. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + x^2 + y^2 \\ \dot{y} &= y(1 - x) \end{aligned} \tag{9}$$

- a. (5) De evenwichtspunten vind je door linker- en rechterzijde 0 te stellen. Dit geeft 2 punten $(0, 0)$ en $(-1, 0)$.
- b. (10) Lineariseren van (9) rond $(0, 0)$ geeft de eenheidsmatrix. Dus $(0, 0)$ is een instabiele knoop. Lineariseren van (9) rond $(-1, 0)$ geeft

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

wat correspondeert met een zadelpunt en $(-1, 0)$ is dus een instabiel punt.

- c. (5) De (lineaire) stabiliteit van de evenwichtspunten van het oorspronkelijke niet-lineaire stelsel (9) is gelijk aan die van het gelineariseerde stelsel, omdat de eigenwaarden een reëel deel ongelijk nul hebben.

6. (15) Alle oplossingen van de tweede orde differentiaalvergelijking voor $z(t)$:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + ze^{z^2} = z,$$

zijn periodiek.

Het stelsel dat je krijgt door substitutie van $x = z$ en $y = \dot{z}$, is het volgende:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xe^{x^2} \end{pmatrix}$$

Je kunt de banen van dit stelsel uitrekenen. De banen voldoen aan de DV:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - xe^{x^2}}{y}.$$

De impliciete oplossing van deze separable DV is

$$F(x, y(x)) = y^2(x) + e^{x^2} - (1 + x^2) = K,$$

met K een constante. Omdat de functie F symmetrisch is onder spiegelingen in y-as $x \rightarrow -x$ en x-as $y \rightarrow -y$ en $F(x, y)$ continu is, hoeven we om aan te tonen dat alle banen gesloten zijn slechts te bewijzen dat er altijd een snijpunt is met x-as en y-as. Als we $x = 0$ nemen, dan bestaat er inderdaad altijd een snijpunt met de y-as mits $K \geq 0$. Het zelfde geldt voor snijpunten met de x-as. Als $y = 0$ dan bestaan er altijd 2 snijpunten met de x-as mits $K \geq 0$, want $e^{x^2} \geq 1 + x^2$. Dus alle banen zijn gesloten en daarom zijn alle oplossingen periodiek. Merk nu op dat het evenwichtspunt $(0, 0)$ het enige evenwichtspunt is (en er dus geen evenwichtspunten liggen op de andere banen) en dat de baan met $K = 0$ correspondeert met dit evenwichtspunt. Hiermee is het bewijs geleverd.