

Tentamen Analyse 3, WI2601
Maandag 12 januari 2009, 09.00-12.00.

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: als aangegeven (totaal 100 punten te verdienen).
-

1. (10). Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bereken de matrix e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$).

2. (20). Bereken de algemene oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y + z \\ \dot{y} &= 2y + z \\ \dot{z} &= 2z \end{cases}.$$

3. (20). Geef een schets van het faseplaatje van het lineaire stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + y \\ \dot{y} &= x - 3y \end{cases}.$$

Geef hierin duidelijk de doorlooprichting van de banen aan en laat i.h.b. duidelijk zien hoe de oplossingen zich gedragen voor $t \rightarrow \infty$.

4. (20). In $\mathbb{R}^2$ bekijken we het niet-lineaire stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 - xy \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{cases}.$$

- (a) (5). Bereken de evenwichtspunten.
- (b) (15). Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtspunten (stabiel/asymptotisch stabiel/niet stabiel).

5. (30). We bekijken de 2^{de} -orde niet-lineaire vergelijking

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{z}{1 + z^2} = 0, \quad z = z(t). \quad (1)$$

- (a) (5). Schrijf d.m.v. de substituties $x = z$, $y = \dot{z}$, de differentiaalvergelijking (1) als een stelsel van 1^{ste} -orde vergelijkingen.
- (b) (5). Bereken de evenwichtspunten van dit stelsel.
- (c) (5). Stel een differentiaalvergelijking op voor de banen van het stelsel en los deze vergelijking op.
- (d) (5). Teken de baan die door $(0, 1)$ gaat (geef hierbij duidelijk de doorlooprichting aan).
- (e) (5). Laat zien dat alle oplossingen van (1) periodiek zijn. Motiveer uw antwoord!
- (f) (5). Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtspunten van het stelsel (opmerking: het faseplaatje kan hierbij nuttig zijn).