

Tentamen Analyse 3, wi2601, met practicum-vervangende opgave
18 januari 2007; 9.00 - 12.00

$$\text{tentamencijfer} = \frac{\text{behaalde punten} + 5}{5}$$

$$\text{eindcijfer} = .7 \text{ tentamencijfer} + .3 \text{ cijfer Maple-opgave}$$

Het gebruik van een voor het VWO-eindexamen goedgekeurde rekenmachine is toegestaan.
 Een antwoord zonder motivatie wordt niet gewaardeerd.

1. Laat $0 < \varepsilon < \sqrt{2} < M$ twee reële getallen zijn en laat $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue reële functie zijn met de eigenschap dat

$$\varepsilon \leq g_0(x) \leq M \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wij definiëren recursief een rij functies door te schrijven

$$g_{k+1}(x) = \frac{g_k(x)}{2} + \frac{1}{g_k(x)} \quad (k \geq 0).$$

- a) (3pnt) Bewijs dat, voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle $k \geq 1$,

$$\sqrt{2} \leq g_{k+1}(x) \leq g_k(x).$$

- b) (2pnt) Definieer $M_1 = \max \left\{ M, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \right\}$, $M_{k+1} = \frac{M_k}{2} + \frac{1}{M_k}$. Laat zien dat $g_k(x) \leq M_k$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle $k \geq 1$.

- c) (3pnt) Bewijs dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = \sqrt{2}.$$

- d) (2pnt) Bereken

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 g_k(x) dx.$$

Motiveer uw antwoord.

2. (5pnt) Geef een rij functies (g_k) die puntsgewijs maar niet uniform convergeert.
3. a) (3pnt) Bereken alle waarden van $\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}} \right)^{i+1}$.
 b) (3pnt) Vind alle oplossingen van de vergelijking

$$\sin z = i.$$

4. Bepaal voor de volgende machtreeksen de convergentiestralen:

$$\text{a) (3pnt) } \sum_{n=0}^{\infty} n \log(1+n^2) z^n; \quad \text{b) (3pnt) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} z^n.$$

5. Wij beschouwen de lineaire tweede orde differentiaalvergelijking

$$t^2 y'' - t y' - 3y = 0.$$

(Accenten betekenen: differentieëren naar t).

a) (3pnt) Vind een oplossing van de vorm $y = t^k$.

b) (3pnt) Bepaal alle onafhankelijke oplossingen.

c) (3pnt) Laat zien dat het beginwaardeprobleem, bepaald door $y(0) = y'(0) = 0$, oneindig veel oplossingen heeft.

d) (2pnt) Los op:

$$t^2 y'' - t y' - 3y = 5t^4; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 4.$$

6. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + y' + y = 0.$$

a) (3pnt) Laat zien dat dit probleem complexe eigenwaarden heeft.

b) (4pnt) Is het singuliere (dwz evenwichts-) punt een attractor? Motiveer uw antwoord aan de hand van de ligging van de eigenwaarden.

De Maple-opgave

De volgende opgave is bedoeld voor degenen die geen of een onvoldoende practicumcijfer hebben. Het cijfer voor deze opgave vervangt dit practicumcijfer.

De te beschouwen differentiaalvergelijking is

$$y'(x) = (y(x))^2 (1 - y(x)) e^{-x} \ln(1 + e^x)$$

op het gebied $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) (2pnt) Welk type differentiaalvergelijking is dit? Beschrijf de oplossingsstrategie.

b) (2pnt) Bepaal alle constante oplossingen.

c) (3pnt) Geef de Maple commando's die de expliciete formule voor de oplossingen leveren.

d) (3pnt) Geef de Maple commando's die het vectorveld met enkele oplossingen leveren.