
Complexe Functietheorie (wi2602) — 2013

Tussentoets — 22 april 2013

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Er zijn minimaal -9 en maximaal $+36$ punten beschikbaar. De 100%-lijn ligt bij $+27$ punten.

Naast elke opgave is in de vorm ‘‘ $[a, b]$ ’’ aangegeven dat er minimaal a en maximaal b punten te halen zijn.

Opgave 1 Geef de definitie van een *holomorfe/analytische* functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, waarbij $D \subseteq \mathbb{C}$ een niet-lege open deelverzameling van $\mathbb{C}$ is. [-5,2]

Opgave 2 a) Laat weer $D \subseteq \mathbb{C}$ een niet-lege open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn. Welke verschillende mogelijkheden ken je om te bewijzen dat een gegeven functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf is? [0,12]

b) Ga na of de volgende functies holomorf zijn of niet: [-2,4]

$$(i) \quad f(z) = \bar{z}^2 \quad (ii) \quad g(z) = \bar{z}^2 e^{\cos z}$$

Opgave 3 Bereken [-2,8]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z)}{z^2(z^2 - 1)} dz$$

waarbij $\gamma = \alpha_{1/2,1}$ de tegen de wijzers van de klok georiënteerde cirkel is met middelpunt $1/2$ en straal 1 .

Opgave 4 Bereken de (oneigenlijke Riemann) integraal [0,10]

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$$

[Aanwijziging: integreer de functie $f(z) := ze^{iz}(z^2 + 1)^{-1}$ over de rand van het gebied $D_r := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| < r\}$ met $r > 1$, en neem dan de limiet $r \nearrow \infty$. Je kunt gebruik maken van de feiten

$$(i) \quad \left| \frac{1}{w+1} \right| \leq \frac{1}{|w|-1} \quad (|w| > 1)$$

$$(ii) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} e^{-r \sin t} dt = 0.$$
