
Complexe Functietheorie (wi2602) — 2013

Tentamen van 20 juni 2013 — Oplossingen

Het tentamen bestaat uit twee delen:

Deel 1: opgaven 1,2 en 3 (8 + 6 + 4 = 18 punten + 2 gratis)

Deel 2: opgaven 4,5 en 6 (8 + 8 + 2 (+ 2) = 18 (20) punten + 2 gratis)

Opgave 6b is bonus met 2 punten. 40 punten zijn 100%.

Studenten met een voldoende voor de tussentoets zijn vrijgesteld van deel 1.

In elk deel moet er tenminste een 5 behaald worden.

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.

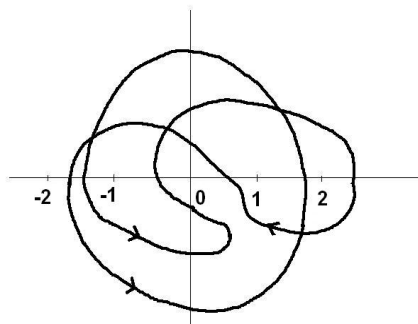
Deel 1:

[8]

Opgave 1 Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven is door

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{z(z-1)^2(z+1)}.$$

- a) Bepaal voor iedere singulariteit van f in $\mathbb{C}$ het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij iedere pool ook de (pool)orde. Licht je antwoorden kort toe.
- b) Bepaal voor iedere singulariteit van f in $\mathbb{C}$ het residu van f in de betreffende singulariteit.
- c) Bereken $\int_{\alpha} f(z) dz$, waarbij het beeld van α de geïoriënteerde contour in de onderstaande figuur is.



Oplossing: a) Blijkbaar heeft f de singulariteiten $0, 1, -1$. Bij $z = 0$ is er een ophefbare singulariteit, omdat

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2 \frac{\pi z}{2}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Bij $z = 1$ is er een pool van orde 2 omdat

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{z(z+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Bij $z = -1$ is er een pool van orde 1 omdat

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{z(z-1)^2} = \frac{-1}{(-1) \cdot (-2)^2} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

b) $\text{Res}(f; 0) = 0$ omdat de singulariteit ophefbaar is.

$\text{Res}(f; -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = 1/4$ (zie hierboven) omdat het een pool van orde 1 is. En

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z+1)\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) - (2z+1) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{z^2(z+1)^2} \\ &= \frac{0 - 3 \cdot 1}{1^2(1+1)^2} = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

omdat het een pool van orde 2 is.

c) Voor de berekening van $\int_{\alpha} f(z) dz$ gebruiken we de residuenstelling. Dat mag: de functie is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$, $\mathbb{C}$ is een elementairgebied, en de kromme is gesloten en gaat niet door een van de singulariteiten. We hebben dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz &= \text{Res}(f; 0)\chi(\alpha; 0) + \text{Res}(f; -1)\chi(\alpha; -1) + \text{Res}(f; 1)\chi(\alpha; 1) \\ &= 2\text{Res}(f; -1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

omdat bij $z = 0$ het residu nul is en bij $z = 1$ het windingsgetal. Het volgt dat

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

[6]

Opgave 2 a) Formuleer de stelling van Liouville.

b) Toon aan: Als $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfe is met $\text{Im } f(z) \geq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ dan is f constant.

Oplossing: a) *Een gehele functie (dwz, een holomorfe functie gedefinieerd op heel $\mathbb{C}$) die begrensd is, is constant.*

b) Neem een punt a met $\text{Im } a < 0$. Dan is $g(z) := \frac{1}{f(z)-a}$ geheel. En g is ook begrensd omdat

$$|g(z)|^2 = \frac{1}{|\text{Re } f(z) - \text{Re } a|^2 + |\text{Im } f(z) - \text{Im } a|^2} \leq \frac{1}{(\text{Im } a)^2}$$

voor alle $z \in \mathbb{C}$. Dus, met Liouville, is g constant. Maar dan is ook f constant, omdat $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$.

[4]

Opgave 3 Bereken de integraal

$$\int_{|z|=1} e^{1/z} dz.$$

Motiveer kort de stappen in je berekening.

Oplossing: Men kan de residuenstelling toepassen: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, en $\mathbb{C}$ is een elementairgebied. De functie f heeft bij 0 een essentiële singulariteit (bekend), dus moeten we de Laurenreeksontwikkeling van f kennen om het residu te bepalen. Uit de machtreeksontwikkeling van e^z krijgen we

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}$$

en voor $k = 1$ hebben we dus $\text{Res}(f; 0) = 1$. Met de residuenstelling volgt dus

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = (2\pi i) \text{Res}(f; 0) = 2\pi i.$$

1. *Alternatieve:* In plaats van de Residuenstelling gebruiken we direct de machtreeks:

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{|z|=1} z^{-k} dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Hier werd gebruikt dat de Laurentreeks op compacta uniform convergeert en we dus de limiet (in de reeks) en de integraal kunnen verwisselen. Elke functie z^{-k} voor $k \neq 1$ heeft een primieve, dus is de integraal nul. De rest is elementair (of een toepassing van de Cauchy formule/residuenstelling voor de functie 1).

2. *Alternatieve* We gaan een substitutie $w = 1/z$ doen. Dan is $dw = -z^{-2} dz$ en dus $dz = -w^{-2} dw$. Let op, de orientatie van de contour verandert en dus hebben we

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = \int_{|w|=1} \frac{e^w}{w^2} dz = 2\pi i (e^w)'(0) = 2\pi i.$$

Hier hebben we de Cauchy integraal formule of de Residuenstelling voor de functie e^w gebruikt.

Deel 2:

[10]

Opgave 4 Bereken de (oneigenlijke Riemann) integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^4 + 1} dx$$

waarbij $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de natuurlijke logaritme is. Motiveer de stappen in je berekening.

Oplossing: We bekijken de holomorfe functie $f(z) = \frac{\log(z)}{z^4+1}$. Hier is $\log$ de tak van de logaritme met $-\pi/2 < \operatorname{Im} \log z = \arg z < 3\pi/2$. We noteren

$$z^4 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_1)(z - \bar{z}_2)$$

waar $z_1 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ en $z_2 = e^{i3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$. Dus, z_1 en z_2 zijn eerste orde polen van f met

$$\operatorname{Res}(f; z_1) = \frac{\log(z_1)}{4z_1^3} = \frac{i\pi}{16} e^{-\frac{3}{4}\pi i} = \frac{\pi i}{16\sqrt{2}}(-1 - i)$$

en

$$\operatorname{Res}(f; z_2) = \frac{\log(z_2)}{4z_2^3} = \frac{3i\pi}{16} e^{-\frac{9}{4}\pi i} = \frac{3i\pi}{16} e^{-\frac{1}{4}\pi i} = \frac{3\pi i}{16\sqrt{2}}(1 - i).$$

Laat nu $\gamma_r(t) := re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, dus γ_r is een halve cirkel, positief georiënteerd. We noemen

$$\alpha_{r,R}(s) = s \quad (s \in [r, R]) \quad \text{en} \quad \beta_{r,R}(s) = -s \quad (s \in [r, R]).$$

Binnen de gesloten contour $\alpha_{r,R} \oplus \gamma_R \oplus \beta_{r,R}^- \oplus \gamma_r^-$ liggen precies de twee singulariteiten z_1 en z_2 . Met de residuenstelling volgt dus

$$\begin{aligned} & \int_r^R f(s) ds - \int_r^R f(-s)(-1) ds + \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= \int_{\alpha_{r,R} \oplus \gamma_R \oplus \beta_{r,R}^- \oplus \gamma_r^-} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)) \\ &= (2\pi i) \frac{\pi i}{16\sqrt{2}}(2 - 4i) = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}(-1 + 2i). \end{aligned}$$

Afschattingen: Merk op dat $|\log z| \leq |\log |z|| + \frac{3\pi}{2}$ voor $\operatorname{Im} z \geq 0$. Dus

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_r} \frac{|\log z| |dz|}{|z^4 + 1|} \lesssim \frac{r |\log r|}{1 - r^4} \rightarrow 0 \quad \text{als } r \searrow 0.$$

En

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{|\log z| |dz|}{|z^4 + 1|} \lesssim \frac{R |\log R|}{R^4 - 1} = O\left(\frac{\log R}{R}\right) \rightarrow 0 \quad \text{als } R \nearrow \infty.$$

Met $r \rightarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$ concluderen we (vanwege $(-s)^4 = s^4$) dat

$$\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}(-1 + 2i) = \int_0^\infty \frac{\log(s) + \log(-s)}{s^4 + 1} ds = \int_0^\infty \frac{2 \log s + i\pi}{s^4 + 1} ds.$$

Nemen we het reële deel zo krijgen we tenslotte

$$\int_0^\infty \frac{\log(s)}{s^4 + 1} ds = \frac{-\pi^2}{8\sqrt{2}} = \frac{-\pi^2\sqrt{2}}{16}.$$

Alternatief: Men kan ook een kwart cirkel als contour kiezen. Dan ligt alleen de singulariteit z_1 binnen het contour en dus

$$\int_r^R f(s)ds - i \int_r^R f(is)ds + \int_{\gamma_r \oplus \gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f; z_1) = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}(1+i).$$

Met $r \rightarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$ volgt (vanwege $(is)^4 = s^4$)

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}(1+i) &= \int_0^\infty \frac{\log s}{s^4+1} ds - i \int_0^\infty \frac{\log s + \frac{i\pi}{2}}{s^4+1} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{\log s}{s^4+1} ds - i \int_0^\infty \frac{\log s}{s^4+1} ds + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^4+1}. \end{aligned}$$

Door hier het imaginaire deel te nemen krijgen we

$$\int_0^\infty \frac{\log s}{s^4+1} ds = \frac{-\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

Opmerking: Zoals je ziet hoeft de integraal $\int_0^\infty \frac{ds}{x^4+1}$ niet te worden berekend!

[6]

Opgave 5 a) Beschouw de functie $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{5x-2}{x^3-1} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Toon aan dat f rond het punt $a = -1/2$ een machtreeksontwikkeling heeft, en bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks. Motiveer je antwoord.

b) Bereken de Laurentreeks van het hoofddeel van de functie $f(z) = \frac{e^z}{z-2}$ op de “annulus” $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$.

[Indien je niet meer weet wat “hoofddeel” betekent, dan bereken gewoon de Laurentreeks van f .]

Oplossing: a) De functie f is de beperking van de rationale en dus holomorfe functie $g(z) = \frac{5z-2}{z^3-1}$ gedefiniëerd op $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$. De singulariteiten van deze functie zijn $z_0 = 1$ en $z_{1/2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$. Naar de stelling van Cauchy heeft g (en dus ook f) een machtreeksontwikkeling rond $a = -1/2$. De convergentiestraal is de afstand van a tot de dichtbijzijnde singulariteit en die is hier $\sqrt{3}/2$.

b) We kunnen schrijven

$$\frac{e^z}{z-2} = \frac{e^z - e^2}{z-2} + \frac{e^2}{z-2}.$$

De functie $\frac{e^z - e^2}{z-2}$ heeft een ophefbare singulariteit bij $z = 2$, dus is geheel. Omdat $\frac{e^2}{z-2} \rightarrow 0$ als $|z| \rightarrow \infty$, is $h(z) := \frac{e^2}{z-2}$ het hoofddeel. Daarvoor kunnen we schrijven

$$\frac{e^2}{z-2} = \frac{e^2}{z(1-\frac{2}{z})} = e^2 \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2 2^{k-1}}{z^k} = \sum_{n<0} e^2 2^{-n-1} z^n$$

en dit is de Laurentreeks van h .

1. *Alternatief:* We berekenen de Laurentreeks van f als

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \frac{1}{z-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} z^{-k} = \sum_{j,k} [j \geq 0][k \geq 1] 2^{k-1} \frac{1}{j!} z^{j-k} \\ &= \sum_{n,j} [j \geq 0][j-n \geq 1] 2^{j-n-1} \frac{1}{j!} z^n = \sum_n \left(\sum_{j \geq \max(0, n+1)} \frac{2^j}{j!} \right) 2^{-n-1} z^n. \end{aligned}$$

(Hier hebben we $n = j - k$ gesteld.) Het hoofddeel is dus

$$h(z) = \sum_{n < 0} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \right) 2^{-n-1} z^n = \sum_{n < 0} e^2 2^{-n-1} z^n.$$

2. *Alternatief:* We passen de formule voor de coëfficiënten van de Laurentreeks toe. Als

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k \quad (|z| > 2)$$

dan is $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) z^{-n-1} dz$ voor elke $n \in \mathbb{Z}$ en $r > 2$. Omdat alleen het hoofddeel is gevraagd kijken we naar $n \leq -1$. Dan is

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{e^z z^{-n-1}}{z-2} dz = e^2 2^{-n-1}$$

naar de Cauchy integraal formule (of de residuenstelling). (Merk op dat voor $n \leq -1$ de functie $e^z z^{-n-1}$ geheel is.) Dus we krijgen zoals boven

$$\sum_{n < 0} e^2 2^{-n-1} z^n$$

als Laurentreeks van het hoofddeel van de functie f .

[2 + 2]

Opgave 6 Bekijk het polynoom $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$.

- Laat zien dat alle nulpunten van p binnen de open annulus $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ liggen.
- (Bonus) Laat (met wat handigheid) zien dat p zeven verschillende nulpunten heeft.

Oplossing: a) We passen Rouché toe. Voor $|z| = 1$ hebben we

$$|p(z) - 12| = |z^7 - 5z^3| \leq |z|^7 + 5|z|^3 = 1 + 5 = 6 < 12.$$

Dus heeft p binnen $|z| \leq 1$ precies zo vele nulpunten als $q(z) = 12$, dus geen. En voor $|z| = 2$ hebben we

$$|p(z) - z^7| = |-5z^3 + 12| \leq 5|z|^3 + 12 = 52 < 2^7 = |z^7|.$$

Dus heeft p binnen $|z| < 2$ net zo vele nulpunten zoals $q(z) = z^7$, dus alle.

Alternatief: Om nulpunten met $|z| \leq 1$ uit te sluiten heb je niet eens Rouché nodig. Stel $p(z) = 0$.

$$12 = |12| = |12 - p(z)| \leq |z|^7 + 5|z|^3.$$

Hieruit volgt dat $|z| \leq 1$ niet zijn kan, omdat anders $12 \leq 6$.

b) Om dubbele nulpunten uit te sluiten bekijken we de afgeleide $p'(z) = 7z^6 - 15z^2 = z^2(7z^4 - 15)$. We moeten laten zien dat als $z^4 = 15/7$, dan kan z geen nulpunt van p zijn. Stel dat dat wel zo is. Dan is $0 = p(z)z = z^8 - 5z^4 + 12z = 225/49 - 75/7 + 12z$. Dit impliceert $12z = 300/7$, i.e. $z = 25/7$. Maar dit kan niet (b.v.b. omdat $|z| = 25/7 > 2$.)