

29

$$4+5+5+3+3=20$$

Tentamen Analyse 4 (wi2602)
27 augustus 2012, 14-17 uur

Normering (onder voorbehoud): $\frac{1}{3}[(2+2)+(3+2)+(1+2+3)+6+(1+2+2+1)+3]$
gratis]]

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

- (a) Geef een analytische functie $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvan het reële deel wordt gegeven door $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$.
(b) Beschrijf in expliciete formulevorm *alle* analytische functies $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ als in het eerste onderdeel. Motiveer waarom de beschrijving volledig is.
- Laat $c \in \mathbb{C}$ een constante zijn en beschouw $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door

$$f_c(z) = e^z - cz^2.$$

Laat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ de open eenheidsschijf zijn.

- (a) Als $|c| > e$, dan heeft f_c precies twee verschillende nulpunten op $\mathbb{D}$. Toon dit aan.
(b) Als $|c| < 1/e$, dan heeft f_c geen enkel nulpunt op $\mathbb{D}$. Toon dit aan.
- (a) Bepaal alle nulpunten van de functie $\cos z$ in het complexe vlak.
Zij N de onder (a) bedoelde verzameling. We beschouwen de functie $f : \mathbb{C} \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = 1/\cos z$.
(b) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond 0.
(c) Het feit dat f een even functie is impliceert dat de machtreeks van f rond 0 de gedaante $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} z^{2k}$ heeft. Geef een nauwkeurige argumentatie waarom dit zo is.

- Bereken de waarde van de integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

- Voor $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, beschouwen we de functie

$$f_k(z) = \frac{1}{(z-3)(z^k-1)}$$

op haar natuurlijke definitiegebied. Laat, voor $R > 0$, α_R het cirkelvormige pad met centrum 0 en straal R zijn, zoals gebruikelijk tegen de wijzers van de klok in georiënteerd.

- (a) Bereken het residu van f_k in 3.
 (b) Als $R > 3$, dan is

$$\int_{\alpha_2} f_k(z) dz = \int_{\alpha_R} f_k(z) dz - \frac{2\pi i}{3^k - 1}.$$

Toon dit aan.

- (c) Laat zien dat

$$\int_{\alpha_2} f_k(z) dz = -\frac{2\pi i}{3^k - 1}.$$

- (d) Zij $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,k} z^n$ de Laurentreeks van f_k op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Toon aan dat

$$c_{-1,k} = -1/(3^k - 1).$$

$$x^5 + 1$$