

Tentamen Analyse 4 (wi2602)
21 juni 2012, 9.00-12.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee delen:

Deel 1: opgaven 1, 2, 3 (normering: $3 + 3 + (1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (1 \text{ gratis})$)

Deel 2: opgaven 4, 5, 6 (normering: $(1 + 1 + 1) + (1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (1 + 1 + 1) + (1 \text{ gratis})$)

Studenten met een voldoende voor de tussentoets zijn vrijgesteld van deel 1.

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

1. Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ een niet-lege open en samenhangende verzameling en zij $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie die voldoet aan $\operatorname{Re} f = \text{constant}$. Toon aan dat f constant is.

2. Toon aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

3. Zij $0 < \gamma < 1$ een reële constante. We gaan bewijzen dat

$$\left| \int_0^\pi x^{\gamma-1} e^{inx} dx \right| = n^{-\gamma} e^{\frac{1}{2}i\pi\gamma} \Gamma(\gamma) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{voor } n \rightarrow \infty,$$

met $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} dx$ de zogenaamde Euler Gamma-functie.

- (a) Toon aan dat voor alle integers $n \geq 1$ geldt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^{\gamma-1} e^{inx} dx \\ = n^{-\gamma} e^{\frac{1}{2}i\pi\gamma} \int_0^{n\pi} x^{\gamma-1} e^{-x} dx - n^{-\gamma} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (n\pi e^{i\theta})^\gamma e^{in\pi e^{i\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Aanwijzing: Kies $0 < \varepsilon < n\pi$ en integreer de functie $f_n(z) = z^{\gamma-1} e^{inz}$ langs een gesloten pad dat de twee kwartcirkels met stralen ε en $n\pi$ in het eerste kwadrant verbindt. Laat vervolgens $\varepsilon \downarrow 0$.

- (b) Toon aan dat

$$\left| n^{-\gamma} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (n\pi e^{i\theta})^\gamma e^{in\pi e^{i\theta}} d\theta \right| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{voor } n \rightarrow \infty.$$

Opmerking: Het gestelde volgt nu door (b) en (c) te combineren met de afchatting $|\int_{\pi n}^{\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx| \leq (\pi n)^{\gamma-1} \int_{\pi n}^{\infty} e^{-x} dx = (n\pi)^{\gamma-1} e^{-\pi n}$.

4. Op de annuli

$$A_{\text{binnen}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\}$$

$$A_{\text{buiten}} = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 2\}$$

beschouwen we de analytische functie $f(z) = z/(z^2 + 1)$.

- (a) Beschrijf de aard van de singulariteit bij $z = i$.
- (b) Geef de Laurentreeks van f op A_{binnen} rond $z = i$.
- (c) Geef de Laurentreeks van f op A_{buiten} rond $z = i$.

5. Beschouw het polynoom $p(z) = z^5 + 6z - 1$.

- (a) Laat zien dat p een reëel nulpunt heeft in de disc $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4}\}$.
- (b) Laat zien dat p precies vier verschillende nulpunten heeft in de annulus $\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$.

6. Laat $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch zijn en veronderstel dat

$$|f'(z)| < \frac{|f(z)|}{|z|^2}$$

voor alle z in $\mathbb{C}$ met $|z| > 1$.

- (a) Laat zien dat f geen nulpunten heeft op $\mathbb{C}$.
Aanwijzing: Beschouw de functie $f'(z)/f(z)$.
- (b) Laat zien dat f'/f constant is.
- (c) Leid hieruit af dat f constant is.