

Tentamen Analyse 4 (wi2602)
17 juni 2011, 14-17 uur

Het tentamen bestaat uit twee delen:

Deel 1: opgaven 1, 2a, 3ab, 4c (normering: $2 + 2 + (1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + 2 + (1 \text{ gratis})$)

Deel 2: opgaven 2b, 4ab, 5, 6 (normering: $2 + (1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + 2 + (1 + 1) + (1 \text{ gratis})$)

Studenten met een voldoende voor de tussentoets zijn vrijgesteld van deel 1.

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

1. Bereken de contourintegraal

$$\int_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z} dz,$$

waarbij de contour tegen de wijzers van de klok is georiënteerd.

Antwoord: Binnen de aangegeven contour heeft $f(z) = \frac{\tan z}{z} = \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{\cos z}$ een ophefbare singulariteit bij $z = 0$ en een pool van orde 1 bij $z = \frac{1}{2}\pi$.

Residu bij $z = \frac{1}{2}\pi$:

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (z - \frac{1}{2}\pi) f(z) = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{z - \frac{1}{2}\pi}{\cos z} = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{-\sin z} = -\frac{2}{\pi}.$$

Dit geeft

$$\int_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z} dz = 2\pi i \cdot -\frac{2}{\pi} = -4i.$$

Het gebruik van residuen kan vermeden worden door te schrijven

$$\frac{\tan z}{z} = \frac{g(z)}{z - \frac{1}{2}\pi} \quad \text{met } g(z) = (z - \frac{1}{2}\pi) \frac{\tan z}{z}$$

en na te gaan dat g alleen ophefbare singulariteiten heeft binnen de contour. Het antwoord is dan te vinden als $2\pi i \cdot g(\frac{1}{2}\pi)$.

2. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-2}.$$

- (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond i .

Antwoord: Volgens de theorie is de convergentiestraal r gelijk aan de afstand van i tot de dichtstbijzijnde singulariteit van f (te weten: 1), dus $r = \sqrt{2}$.

- (b) Bepaal de Laurentreeks van f op de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 4| < 3\}$.

Antwoord: Methode 1: Ontwikkel beide termen in machten van $z - 4$. Er geldt, voor $0 < |a| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+a)^2} &= -\frac{d}{da} \frac{1}{1+a} = -\frac{d}{da} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n a^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n a^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) a^n, \end{aligned}$$

en dus, wegens $\frac{1}{3}|z - 4| < 1$,

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{9} \frac{1}{(\frac{1}{3}(z-4) + 1)^2} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{1}{3^n} (z-4)^n.$$

Verder geldt, met behulp van de meetkundige reeks en gebruikmakend van $|\frac{2}{z-4}| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-4) + 2} = \frac{1}{z-4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z-4}} \\ &= \frac{1}{z-4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1}}{(z-4)^n}. \end{aligned}$$

Optellen geeft de gevraagde Laurentreeks.

Methode 2: Gebruik de expressie voor de coëfficiënten van de Laurentreeks $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-4)^n$. Voor $2 < r < 3$ geldt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-4|=r} \frac{f(z)}{(z-4)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-4|=r} \frac{1}{(z-1)^2 (z-4)^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-4|=r} \frac{1}{(z-2)(z-4)^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

We bekijken de twee integralen op de laatste regel. Voor $n = 0, 1, 2, \dots$ heeft de eerste integrand een pool van orde $n+1$ bij $z = 4$ en de tweede een pool van orde 1 bij $z = 2$ en een pool van orde $n+1$ bij $z = 4$. Voor $n = -1, -2, \dots$ is eerste integrand holomorfe en heeft de tweede een pool van orde 1 bij $z = 2$. Het uitrekenen van de integralen kan nu geschieden met behulp van residuen (of de Cauchy integraalformule).

3. Laten $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfe functies zijn, met g niet identiek 0, zodanig dat $|f(z)| \leq |g(z)|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

- (a) Toon aan dat er een holomorfe functie $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bestaat, zodanig dat $h(z) = f(z)/g(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $g(z) \neq 0$.

Antwoord: In de buurt van de nulpunten van g is de functie $h := f/g$ begrensd, en dus zijn die nulpunten ophefbare singulariteiten van h (Riemann ophefbare singulariteitsstelling).

- (b) Toon aan dat er een constante $c \in \mathbb{C}$ bestaat zodanig dat $f(z) = cg(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Antwoord: De functie h is begrensd en holomorf op $\mathbb{C}$, en dus constant (stelling van Liouville).

--- Z.O.Z. ---

4. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^2 + 1}.$$

- (a) Bepaal voor iedere singulariteit van f in het complexe vlak het type van de betreffende singulariteit.

Antwoord: Enkelvoudige polen in $z = \pm i$ (wegens het eindig zijn van de limieten onder (b)) en een essentiële singulariteit in $z = 0$. Voor $0 < |z| < 1$ geldt immers

$$f(z) = \left(\frac{1}{1!z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) (1 - z^2 + z^4 - \dots).$$

Uitvermenigvuldigen geeft de Laurentreeks, die oneindig veel termen met negatieve machten van z bevat. Een andere manier om te zien dat $z = 0$ een essentiële singulariteit is, is op te merken dat $|f(x)|$ begrensd is als $|x| \rightarrow 0$, terwijl $|f(iy)| \geq \frac{1}{4}(e^{1/y} - e^{-1/y})$ voor $0 < y < 1$, zodat $|f(iy)|$ onbegrensd is als $|y| \rightarrow 0$.

- (b) Bepaal voor iedere pool van f in het complexe vlak het residu van f in de betreffende pool.

Antwoord:

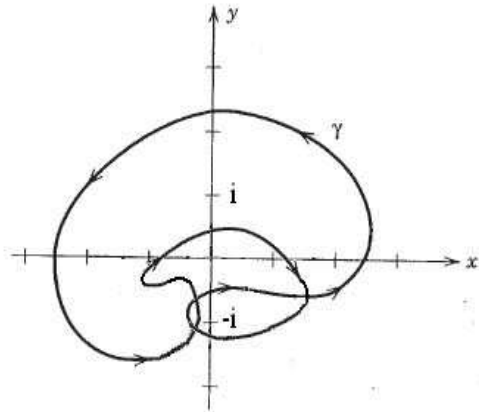
Residu in $z = i$:

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{\sin(1/i)}{i + i} = \frac{\sin(-i)}{2i} = -\frac{1}{4}(e - e^{-1}).$$

Residu in $z = -i$:

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \frac{\sin(-1/i)}{-i - i} = \frac{\sin(i)}{-2i} = -\frac{1}{4}(e - e^{-1}).$$

- (c) Bereken de contourintegraal $\int_{\gamma} f(z) dz$, met γ de contour uit de onderstaande figuur.



Antwoord: De polen i en $-i$ hebben index 1 en -1 respectievelijk, en de essentiële singulariteit 0 heeft index 0. Het antwoord is dus $2\pi i \cdot (\text{Res}_f(i) - \text{Res}_f(-i)) = 0$.

5. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx,$$

waarbij $\log x$ de gebruikelijke reëelwaardige logaritme is.

Antwoord: Integreer $f(z) = \frac{z^2 \log z}{1+z^4}$ over ede contour γ bestaande uit de halve cirkels in het bovenhalfvlak met stralen R en ε (om de oorsprong te vermijden, waar de $\log$ niet gedefinieerd is) en de lijnstukken van $-R$ tot $-\varepsilon$ en van ε tot R . Voor kleine ε and grote R omsluit γ de polen bij $z = e^{\frac{1}{4}\pi i}$ en $z = e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

Residu in $z = e^{\frac{1}{4}\pi i}$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow e^{\frac{1}{4}\pi i}} (z - e^{\frac{1}{4}\pi i}) f(z) &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{1}{4}\pi i}} z^2 \log z \frac{(z - e^{\frac{1}{4}\pi i})}{1 + z^4} = e^{\frac{1}{2}\pi i} \log(e^{\frac{1}{4}\pi i}) \lim_{z \rightarrow e^{\frac{1}{4}\pi i}} \frac{1}{4z^3} \\ &= i \cdot \frac{1}{4} \pi i \cdot \frac{1}{4e^{\frac{3}{4}\pi i}} = -\frac{\pi}{16} \frac{\sqrt{2}}{-1+i}. \end{aligned}$$

Residu in $z = e^{\frac{3}{4}\pi i}$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3}{4}\pi i}} (z - e^{\frac{3}{4}\pi i}) f(z) &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3}{4}\pi i}} z^2 \log z \frac{(z - e^{\frac{3}{4}\pi i})}{1 + z^4} = e^{\frac{3}{2}\pi i} \log(e^{\frac{3}{4}\pi i}) \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3}{4}\pi i}} \frac{1}{4z^3} \\ &= -i \cdot \frac{3}{4} \pi i \cdot \frac{1}{4e^{\frac{9}{4}\pi i}} = \frac{3\pi}{16} \frac{\sqrt{2}}{1+i}. \end{aligned}$$

Dit geeft, na vereenvoudigen,

$$\int_\gamma \frac{z^2 \log z}{1+z^4} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{16} \frac{\sqrt{2}}{-1+i} + \frac{3}{16} \frac{\sqrt{2}}{1+i} \right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}i \right) \pi^2 \sqrt{2}.$$

Het deel van de contour langs de negatieve as geeft bijdrage

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{x^2 (\log |x| + \pi i)}{1+x^4} dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx + \pi i \int_\varepsilon^R \frac{x^2}{1+x^4} dx \\ &\rightarrow \int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx + \frac{1}{4} i \pi^2 \sqrt{2} \end{aligned}$$

als $\varepsilon \downarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$, waarbij we gebruikten dat

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \pi \sqrt{2}$$

(apart uitrekenen via halvemaan contour, is makkelijk).

De contouren over de twee cirkelbogen verdwijnen in de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$, want zij zijn van order $\varepsilon \cdot |\log \varepsilon|/1$ en $R \cdot \log R/R^4$ respectievelijk.

Samen geeft dit

$$2 \int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx + \frac{1}{4} i \pi^2 \sqrt{2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} i\right) \pi^2 \sqrt{2}$$

en dus

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} i\right) \pi^2 \sqrt{2} - \frac{1}{4} i \pi^2 \sqrt{2} \right) = \frac{1}{16} \pi^2 \sqrt{2}.$$

6. Beschouw de functie $f(z) = \log z - 4(z-2)^2$, met $\log z$ de gebruikelijke holomorfe tak van de logaritme op $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

- (a) Laat zien dat f twee nulpunten heeft in de open cirkelschijf $D(2, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$, rekening houdende met multipliciteiten.

Antwoord: Pas Rouché toe met $g(z) = -4(z-2)^2$: voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z-2| = 1$ geldt $|f(z) - g(z)| = |\log z| \leq (\log 3) + \frac{1}{2}\pi < 4 = |g(z)|$. We zien dat f en g evenveel nulpunten hebben in de open cirkelschijf $D(2, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$, rekening houdende met multipliciteiten.

- (b) Laat zien dat f precies twee nulpunten heeft in $D(2, 1)$.

Antwoord: In een nulpunt z_0 van hogere orde zou gelden $f(z_0) = f'(z_0) = 0$. In het enige nulpunt z_0 van f' in $D(2, 1)$ geldt echter $f(z_0) \neq 0$ (gemakkelijk na te rekenen), dus alle nulpunten in $D(2, 1)$ zijn enkelvoudig.