

Tentamen Analyse 4 (wi2602)
25 augustus 2010, 14-17 uur

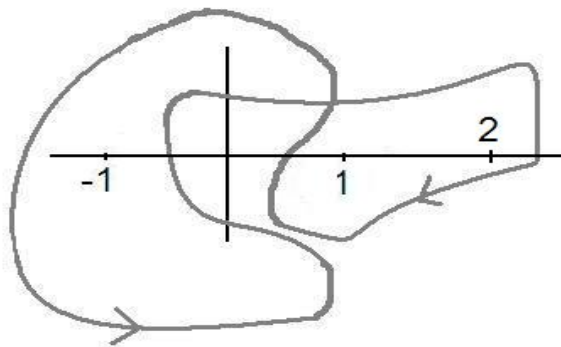
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

Puntenverdeling: $[(1 + 2) + (1 + 2 + 1) + 4 + 2 + 2 + (2 + 1) + 2 \text{ gratis}]/2$

1. Beschouw de vergelijking $z^5 + 15z + 1 = 0$, waarin z complex is.
 - (a) Laat zien dat deze vergelijking precies één oplossing binnen de open disk $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{2}\}$ heeft en dat deze oplossing reëel is.
 - (b) Laat zien dat deze vergelijking precies vier verschillende oplossingen in de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$ heeft.
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2(z+1)}.$$

- (a) Bepaal het type singulariteit van f in ∞ .
- (b) Bepaal, voor iedere singulariteit van f in het complexe vlak, het type van de betreffende singulariteit en het residu.
- (c) Bereken $\oint_{\gamma} f(z) dz$, waarbij γ de contour uit de onderstaande figuur is.



3. Bereken de waarde van de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx.$$

Hier is $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de gebruikelijke reëelwaardige logaritme op de positieve reële getallen.

Aanwijzing: Integreer over een contour in het bovenhalfvlak die de halve cirkels met stralen r en R bevat, en neem vervolgens de limieten $r \downarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$.

4. Bepaal de Laurentreeks (rond het punt -1) van de functie

$$f(z) = \frac{3z+4}{(z-2)(z+3)} + \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

op de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+1| < 3\}$.

5. Laat $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf op geheel $\mathbb{C}$ zijn. Veronderstel dat

$$|f(z)| \leq |z|^{2011/2010}$$

voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \geq 2010$. Toon aan dat $f(z) = az + b$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ en zekere $a, b \in \mathbb{C}$.

6. Zij $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ een begrensde continue functie.

(a) Toon aan dat de *Laplace transform* van f ,

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt,$$

holomorf is op het open rechter halfvlak $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

(b) Bepaal de Laplace transform van de functie $f(t) = \sin(t)$.

Aanwijzing: Bereken eerst $F(x)$ voor reële $x > 0$.
