

Tentamen Analyse 4 (wi2602)
18 juni 2010, 9.00-12.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee delen. Studenten met vrijstelling voor een van de delen hoeven het betreffende deel niet te maken.

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

Puntenverdeling:

Deel 1: $(1+1+1)+(1+2)+(1+2) + 1$ gratis

Deel 2: $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + (1+1+1+1) + 1$ gratis

DEEL 1

1. (a) Geef de definitie van een holomorfe functie.

Antwoord: Een functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ is holomorf op U als $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ op U , met $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y})$.

- (b) Toon aan dat een C^1 -functie $f = u + iv$, met u en v reëelwaardig, dan en slechts dan holomorf is als u en v aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen.

Antwoord: Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 &\iff \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ &\iff \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\ &\iff \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0\end{aligned}$$

- (c) Zij $U \subseteq \mathbb{C}$ open en samenhangend, en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een holomorfe functie met de eigenschap dat $|f|$ constant is op U . Toon aan dat f constant is.

Antwoord: Op iedere open disc D met $\bar{D} \subseteq U$ kunnen we de maximum modulus stelling toepassen en concluderen dat f constant is op D . Omdat U samenhangend is volgt hieruit dat f constant is op U . Een meer elementair bewijs, dat gebruikmaakt van de hint, gaat als volgt. Er geldt $f(z)\overline{f(z)} = c$ met $c \geq 0$ een constante onafhankelijk van $z \in U$. We mogen aannemen dat $c > 0$, want uit $c = 0$ zou volgen dat $f = 0$ en dan zijn we klaar. Er volgt dat f geen nulpunt heeft op U en dat $\bar{f} = c/f$ holomorf is. Omdat ook f holomorf is volgt dat $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ holomorf is. Maar $u := \operatorname{Re} f$ is dan een *reëelwaardige*

holomorfe functie op U . Uit de Cauchy-Riemann vergelijkingen volgt dat dit alleen mogelijk is als de partiële afgeleiden $\partial u/\partial x$ en $\partial u/\partial y$ identiek nul zijn op U , hetgeen impliceert (vanwege de samenhang van U) dat u constant is. We zien dus dat $\operatorname{Re} f$ constant is. Evenzo volgt uit de holomorfie van $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ dat $\operatorname{Im} f$ constant is.

2. (a) Toon aan dat de functie $f(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2}$ een ophefbare singulariteit heeft in de oorsprong.

Antwoord: Er geldt $f = g^2$ met

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots = 1 - z^2 h(z),$$

met $h(z) = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots$. De machtreeks die h definieert convergeert op heel $\mathbb{C}$. In het bijzonder is

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z^2 h(z))^2 = 1.$$

We kunnen f dus continu voortzetten in $z = 0$. De holomorfie in $z = 0$ van deze continue voortzetting volgt uit de Stelling 2.3.3 en Gevolg 3.1.2 (of uit de Riemann ophefbare singulariteitsstelling, Stelling 4.1.1).

- (b) Bepaal de machtreeks van f rond de oorsprong.

Antwoord: Met behulp van de identiteit $\sin^2(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2z)$ vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(z)}{z^2} &= \frac{1 - \cos(2z)}{2z^2} = \frac{1}{2z^2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} z^{2n}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

3. (a) Bepaal de polen van de functie

$$f(z) = \frac{z}{\sinh(z)}$$

en hun orde.

Antwoord: De nulpunten van $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ vinden we via

$$e^z - e^{-z} = 0 \iff e^{2z} - 1 = 0 \iff z = k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

waarbij we gebruikten dat e^z nulpuntvrij is.

Er geldt, met behulp van de regel van l'Hôpital,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{1}{2}(e^z - e^{-z})} = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z + e^{-z}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Het punt $z = 0$ is dus geen pool, maar een ophefbare singulariteit.

Voor $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gebruiken we de identiteit

$$\begin{aligned}\sinh(z + k\pi i) &= \frac{1}{2}(e^{z+k\pi i} - e^{-z-k\pi i}) \\ &= \frac{1}{2}(e^z e^{k\pi i} - e^{-z} e^{-k\pi i}) = (-1)^k \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = (-1)^k \sinh(z).\end{aligned}$$

In combinatie met het bovenstaande vinden we

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow k\pi i} (z - k\pi i) \frac{z}{\sinh(z)} &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z + k\pi i}{\sinh(z + k\pi i)} \\ &= (-1)^k \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sinh(z)} (z + k\pi i) \\ &= (-1)^k \cdot 1 \cdot k\pi i = (-1)^k k\pi i\end{aligned}$$

Dit laat zien dat $z = k\pi i$ een pool van orde één is.

(b) Bereken de integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z}{\sinh(z)} dz.$$

Hier is de γ de cirkel rond de oorsprong met straal 4, tegen de wijzers van de klok georiënteerd.

Antwoord: De kromme γ omsluit de polen $\pm\pi i$. In het vorige deeltje hebben we reeds de residuen van f in deze punten berekend, te weten respectievelijk $\mp\pi i$. De residuenstelling geeft

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z}{\sinh(z)} dz = -\pi + \pi = 0.$$

In plaats van de residuenstelling kunnen we ook de Cauchy integraalstelling gebruiken, als we schrijven

$$\frac{z}{\sinh(z)} = \frac{z}{\sinh(z)} \frac{z \pm \pi i}{z \pm \pi i} = \frac{f_{\pm}(z)}{z \pm i}$$

met $f_{\pm} = \frac{z}{\sinh(z)}(z \pm \pi i)$; deze functie heeft (zoals de bovenstaande berekening laat zien) een ophefbare singulariteit in $z = \mp\pi i$.

DEEL 2

4. Toon aan dat

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Antwoord: Er geldt

$$\begin{aligned}z^4 + z^2 + 1 = 0 &\iff z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ &\iff z^2 \in \{e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i}\} \iff z \in \{e^{\frac{1}{3}\pi i}, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i}, e^{\frac{5}{3}\pi i}\}.\end{aligned}$$

We integreren langs de contour γ_R die bestaat uit het interval $[-R, R]$ en de boog $\{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$, tegen de wijzers van de klok georiënteerd.

Deze contour omsluit de polen $z = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $z = e^{\frac{2}{3}\pi i}$, alwaar de residuen van f gegeven worden door

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow e^{\frac{1}{3}\pi i}} \frac{z - e^{\frac{1}{3}\pi i}}{z^4 + z^2 + 1} &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{1}{3}\pi i}} \frac{1}{4z^3 + 2z} \\ &= \frac{1}{4e^{\pi i} + 2e^{\frac{1}{3}\pi i}} = \frac{1}{-4 + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})} = \frac{1}{-3 + i\sqrt{3}}\end{aligned}$$

en, geheel analoog,

$$\lim_{z \rightarrow e^{\frac{2}{3}\pi i}} \frac{z - e^{\frac{2}{3}\pi i}}{z^4 + z^2 + 1} = \frac{1}{4e^{\pi i} + 2e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{1}{-4 + 2(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})} = \frac{1}{3 + i\sqrt{3}}.$$

Dit geeft

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4 + z^2 + 1} dz = \frac{1}{-3 + i\sqrt{3}} + \frac{1}{3 + i\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}}{6}.$$

Als we $R \rightarrow \infty$ laten gaan, verdwijnt de bijdrage over de boog, en de bijdrage over de lijn geeft de gewenste integraal, naar over $\mathbb{R}$ in plaats van over $\mathbb{R}_+$. Bijgevolg is

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot -\frac{i\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

5. Zij $n \geq 1$ geheel en laat $a \in \mathbb{C}$ voldoen aan $|a| > e$. Toon aan dat de vergelijking

$$az^n = e^z$$

precies n verschillende oplossingen heeft in de disc $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Antwoord: We passen de stelling van Rouché toe op de functies $f(z) = az^n - e^z$ en $g(z) = az^n$. Op de rand $\partial D(0, 1)$ geldt $|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e < a = |az^n| = |g(z)|$. De functie f heeft zodoende n nulpunten, rekening houdende met hun multiplicititeit.

Als we een nulpunt met multiplicititeit $k \geq 2$ hadden, zeg in het punt $c \in D(0, 1)$, dan zou niet alleen $f(c) = 0$ maar ook $f'(c) = 0$. Dit geeft

$$0 = ac^n - e^c = anc^{n-1} - e^c,$$

waaruit volgt dat

$$c^n = anc^{n-1}.$$

Nu is $c \neq 0$ (want 0 is geen nulpunt van f), dus vinden we $c = an$. In het bijzonder is $|c| \geq n|a| > ne \geq e > 1$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $c \in D(0, 1)$.

6. Op het rechter halfvlak $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ is de *Euler Γ -functie* gedefinieerd door

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

waarbij $t^w := e^{w \ln t}$ voor $t > 0$ en $w \in \mathbb{C}$. Uit de afchatting $|e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}$ volgt dat deze integraal absoluut convergeert voor alle $z \in \mathbb{H}$.

- (a) Toon aan (bijvoorbeeld onder gebruikmaking van de stelling van Morera) dat Γ holomorf is op $\mathbb{H}$.

Antwoord: Laat eerst $0 < \varepsilon < R < \infty$. Zij γ een willekeurige gesloten stuksgewijze C^1 -kromme in $\mathbb{H}$. Verwisselen van de integratievolgorde geeft

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_{\varepsilon}^R e^{-t} t^{z-1} dt dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^R \int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dz dt = 0,$$

waarbij de tweede gelijkheid volgt uit de holomorfie van $z \mapsto t^{z-1} = t^{-1} e^{z \ln t}$. We laten nu $\varepsilon \downarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$, en merken op dat de integraal $\int_{\varepsilon}^R \int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt$ dan convergeert naar $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt$, uniform voor z op de kromme γ . Dit laatste volgt uit

$$\left| \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} dt \leq \int_0^{\varepsilon} t^{\operatorname{Re} z - 1} dt = \frac{\varepsilon^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}$$

en het feit dat er voor iedere gesloten kromme γ constanten $0 < c < C < \infty$ zijn zodanig dat $c \leq \operatorname{Re} z \leq C$ voor alle z op γ . Op analoge wijze zien we dat $\int_R^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ naar 0 convergeert, uniform voor z op γ .

We mogen nu de limiet onder de integraal nemen en vinden dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \Gamma(z) dz = 0.$$

Aangezien de keuze van γ willekeurig was, volgt de holomorfie van Γ uit de stelling van Morera.

- (b) Bewijs de identiteit

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{H},$$

en leid hieruit af dat $\Gamma(n) = (n-1)!$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$

Aanwijzing: Bewijs de identiteit eerst voor reële $z \in \mathbb{H}$.

Antwoord: Voor $x > 0$ volgt de identiteit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ uit een eenvoudige partiële integratie.

Vervolgens zien we dat $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$; de identiteit $\Gamma(n) = (n-1)!$ volgt nu met inductie naar n .

Uit het bovenstaande volgt dat voor alle $z \in \mathbb{H}$ de volgende identiteiten gelden:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1) \cdots (z+k-1)} = \dots$$

- (c) Beredeneer dat hieruit volgt dat er een unieke holomorfe functie $\tilde{\Gamma} : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$ bestaat die voldoet aan $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ voor alle $z \in \mathbb{H}$.

Aanwijzing: Beschouw de achtereenvolgende quotiëntfuncties op de gebieden $\mathbb{H}_k := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -k\} \setminus \{0, -1, -2, \dots, -k+1\}$.

Antwoord: Op $\mathbb{H}_k$ definieert

$$\Gamma^{(-k)}(z) := \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1) \cdots (z+k-1)}$$

een holomorfe functie, die op $\mathbb{H}$ met $\Gamma(z)$ overeenstemt. Merk tevens op dat als $l \geq k$, dan $\Gamma^{(-k)} = \Gamma^{(-l)}$ op $\mathbb{K}$, en dus op $\mathbb{H}_k$ wegens uniciteit van holomorfe voortzettingen (Stelling 3.6.1). Definieer nu, voor $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$,

$$\tilde{\Gamma}(z) := \Gamma^{(-k)}(z), \quad z \in \mathbb{H}_k.$$

Deze functie is goed gedefinieerd, holomorf, en gelijk aan $\Gamma(z)$ op $\mathbb{H}$. Uniciteit volgt wederom uit de uniciteit van holomorfe uitbreidingen (Stelling 3.6.1).

- (d) Laat zien dat $\tilde{\Gamma}$ polen van orde één heeft in de punten $0, -1, -2, \dots$ en bereken het residu van $\tilde{\Gamma}$ in iedere pool.

Antwoord: Er geldt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \tilde{\Gamma}(z) &= \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \frac{\Gamma(z+k+1)}{z(z+1) \cdots (z+k)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-k) \cdot (-k+1) \cdots (-2) \cdot (-1)} = \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Dit laat zien dat $-k$ een pool is van orde één, met residu $\frac{(-1)^k}{k!}$.

-- einde --