

Tussentoets Analyse 4
26 maart 2010, 10.45 - 12.30

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

Puntenverdeling: $1\frac{1}{2} + (1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (1 \text{ gratis})$

1. Toon aan dat de functie $z \mapsto \operatorname{Re} z$ niet holomorf is. Motiveer iedere stap in de redenering zo volledig mogelijk.

We schrijven $z = x + iy$. De functie $f(z) := \operatorname{Re} z = x$ voldoet dan aan $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, dus

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}.$$

($\frac{1}{2}$ **punt** voor de definitie van $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{1}{2}$ **punt** voor correcte berekening gebruikmakend van deze definitie)

Per definitie is een functie f holomorf als $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ op zijn domein van definitie ($\frac{1}{2}$ **punt**). De functie $\operatorname{Re} z$ is dus niet holomorf.

2. Bereken de volgende contourintegralen, waarbij γ steeds de cirkel met middelpunt 0 en straal $\frac{3}{2}$ is, tegen de wijzers van de klok geöriënteerd:

a) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z-1)^3} dz$

Het punt $z = 1$ ligt binnen de cirkel γ ($\frac{1}{2}$ **punt**). Volgens de Cauchy integraalformule ($\frac{1}{2}$ **punt**) geldt, met $f(z) = z^2$,

$$f^{(2)}(1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z-1)^3} dz,$$

dus de integraal is gelijk aan $f^{(2)}(1)/2! = 2/2 = 1$ ($\frac{1}{2}$ **punt**)

b) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z-1)^3 - 1} dz$

De noemer heeft de nulpunten $z_k = 1 + e^{2\pi i k/3}$ met $k = 0, 1, 2$. Alleen de nulpunten met $k = 1, 2$ liggen binnen γ . We schrijven $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, waarbij γ_k precies één maal om het nulpunt z_k loopt ($k = 1, 2$) ($\frac{1}{2}$ **punt**). De bijbehorende contourintegralen rekenen we vervolgens uit

onder gebruikmaking van de Cauchy integraalformule toegepast op functies

$$f_1(z) = \frac{z^2}{(z - z_0)(z - z_2)},$$

$$f_2(z) = \frac{z^2}{(z - z_0)(z - z_1)}.$$

($\frac{1}{2}$ punt) De functie zijn zo gekozen dat

$$\frac{z^2}{(z - 1)^3 - 1} = \frac{f_k(z)}{z - z_k}, \quad k = 1, 2.$$

Dit geeft als antwoord

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z - 1)^3 - 1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f_1}{z - z_1} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f_2}{z - z_2} dz \\ &= f_1(z_1) + f_2(z_2), \end{aligned}$$

($\frac{1}{2}$ punt) waarvan de waarde expliciet kan worden bepaald door invulling.

3. In deze opgave bespreken we twee manieren om de natuurlijke logaritme van zekere complexe getallen te definiëren.

Gebruikmakend van het feit dat de functie $\phi(z) := 1/(1 - z)$ een bijectie definieert van de open cirkelschijf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ op het open rechterhalfvlak $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\}$, definiëren we de functie $\ln : \mathbb{H}_{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\ln\left(\frac{1}{1 - z}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

- a) Toon aan dat de functie $z \mapsto \ln z$ een holomorfe uitbreiding naar $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ is van de natuurlijke logaritme.

Voor reële x met $|x| < 1$ geeft geldt $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ via ontwikkelen naar Taylorreeks (dat de reeks inderdaad naar de gewenste somfunctie convergeert volgt uit de corresponderende eigenschap voor de meetkundige reeks en termsgewijs integreren). ($\frac{1}{2}$ punt)

De holomorfie van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ op $\mathbb{D}$ volgt uit het feit dat voor $|z| < r < 1$ de som uniform convergeert, en uniforme limieten van holomorfe functies zijn holomorf (b.v. via Morera). ($\frac{1}{2}$ punt)

De holomorfie van $z \mapsto \ln z$ op $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ volgt nu uit het feit dat samenstellingen van holomorfe functies weer holomorf zijn; we stellen samen met de inverse $\phi^{-1}(z) = 1 - z^{-1}$, die holomorf is op $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$. ($\frac{1}{2}$ punt)

Zij $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. Definieer de functie $\operatorname{Ln} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\operatorname{Ln} z := \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

waarbij γ_z het rechte pad is dat 1 met z verbindt.

- b) Toon aan dat de functie $z \mapsto \operatorname{Ln} z$ holomorf is op $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Dit bewijst men door te laten zien dat Ln complex differentieerbaar is. Voor het differentiequotient in het punt z_0 vinden we (voor z zo dicht bij z_0 dat de rechte tussen z_0 en z de negatieve as niet snijdt):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z_0}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left(\int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} \frac{1}{\zeta} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_{z,z_0}} \frac{1}{\zeta} d\zeta, \end{aligned}$$

waarbij γ_{z,z_0} het rechte pad is dat z met z_0 verbindt ($\frac{1}{2}$ punt). De laatste gelijkheid volgt uit de Cauchy stelling, volgens welke de kringintegraal over $\gamma_{1,z} + \gamma_{z,z_0} + \gamma_{z_0,1} = 0$ ($\frac{1}{2}$ punt). Parametriseren $\gamma_{z,z_0}(t) = z + t(z_0 - z)$ geeft

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_{z,z_0}} \frac{1}{\zeta} d\zeta &= \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 \frac{z_0 - z}{z + t(z_0 - z)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{z + t(z_0 - z)} dt, \end{aligned}$$

zodat

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z_0}{z - z_0} = \frac{1}{z_0}$$

dankzij uniforme convergentie $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z + t(z_0 - z)} = \frac{1}{z_0}$ onder de integraal ($\frac{1}{2}$ punt).

NB.: Alternatief argument: het gebied $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ is stervormig ($\frac{1}{2}$ punt) t.o.v. $z = 1$ en de functie $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ is holomorf op dat gebied ($\frac{1}{2}$ punt). Dan weten we (zie boek & college) dat $z \mapsto \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$ een holomorfe primitieve is van $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ ($\frac{1}{2}$ punt).

- c) Toon aan dat $\operatorname{Ln} z = \ln z$ voor alle $z \in \mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$.

Aanwijzing: Neem eerst $z \in \mathbb{H}_{\frac{1}{2}} \cap \mathbb{R}$.

Voor reële x in $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ parametriseren we γ_x als $\gamma_x(t) = 1 + t(x - 1)$ ($\frac{1}{2}$ punt). Dat geeft

$$\operatorname{Ln} x = \int_1^x \frac{1}{1 + t(x - 1)} \cdot x dt = [\ln(1 + t(x - 1))]_0^1 = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

($\frac{1}{2}$ punt)

Samen met a) geeft dit dat de functies $z \mapsto \ln z$ en $\operatorname{Ln} z$ holomorf zijn op $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ en samenvallen op $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}} \cap \mathbb{R}$

Nu gebruiken we dat twee holomorfe functies f_1 en f_2 op een samenhangend open gebied U , die op een lijnstuk in U overeenstemmen (hier: $U = \mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ en het lijnstuk $x > \frac{1}{2}$), overeenstemmen op heel U ($\frac{1}{2}$ punt).

-- einde --