
Bij elke vraag dient u uw antwoord te beargumenteren. U mag gebruik maken van een rekenmachine en een formuleblad met Laplacetransformatie. Boek, telefoon en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

1. Zij $0 < a < 1$. Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$$

Geef duidelijk aan welke stelling(en) u gebruikt, en geef alle relevante schattingen.

Hint. Beschouw een integraal over een rechthoek met hoekpunten $-R$, R , $R + 2\pi i$ en $-R + 2\pi i$.

2. Bepaal in elk van de gevallen het beeld van het gegeven domein onder de gegeven afbeelding.

(a) domein $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ en afbeelding $w = z/(z - 1)$;

(b) domein $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ en afbeelding $w = z^2$.

3. Beschouw de meerwaardige functie $\llbracket \log(1 + \frac{2}{z}) \rrbracket$.

(a) Bepaal een snede voor deze functie, en laat zien dat er een holomorfe tak f is met $\arg(f(x)) = 0$ voor reële $x > 0$.

(b) Bepaal een ring met centrum 0 waarin deze tak holomorf is, en bepaal een Laurent reeks van f in deze ring.

(c) Laat zien dat $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ gelijk is aan $\max_{|w-1|=2/r} |\log(w)|$, waarbij $\log$ gedefinieerd is met $\arg \in (-\pi, \pi]$. Laat zien dat $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = 0$, en dat $|f(z)| \leq M(r)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \geq r$.

(d) Laat zien dat de inverse Laplace transformatie van deze functie f gelijk is aan $\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{zt} f(z) dz$, $t > 0$, waarbij C een cirkel is met middelpunt 0 en straal 3.

Hint. $\sin \phi \geq \frac{2}{\pi} \phi$ voor $0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi$.

(e) Bereken de inverse Laplace getransformeerde van f . *Hint.* Gebruik de Laurent-reeks voor f en de integraalformule van Cauchy voor afgeleides, en herinner je dat de inverse Laplace getransformeerde gelijk is aan $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} f(z) dz$ voor a voldoende groot.

4. Gegeven is dat $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ een harmonische functie is in het open eerste kwadrant.

(a) Bepaal de harmonisch geconjugeerde functie v met $v(1, 1) = -\frac{1}{2}$.

(b) Stel $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$. Beschrijf de holomorfe functie f als functie van $z = x + iy$.

5. (a) Geef een precieze formulering van de residuenstelling.

(b) Zij f een functie met de eigenschap dat $f(z + 2\pi) = f(z)$ en $f(z + 2\pi i) = f(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor $f(z)$ gedefinieerd is. We nemen aan dat f een holomorfe functie is op een gebied (domein, “region”) dat

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi, \}$$

omvat, behalve eventueel in eindig veel polen in het inwendige van Γ . Laat zien dat $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, waar γ de rand van Γ is.

(c) Veronderstel dat alle polen van f enkelvoudig zijn, en dat f minstens één pool heeft. Laat zien dat f tenminste 2 polen in het inwendige van Γ bevat.

6. Bepaal het aantal nulpunten (geteld met multipliciteit) van $z^5 - 3z + 1$ in de open eenheidsschijf $D(0; 1)$.

NORMERING:

opgave	1	2	3	4	5	6	gratis
punten	14	10	22	14	18	12	10

Bij het onafgeronde tentamencijfer wordt de eventuele bonus opgeteld. Daarna volgt de gebruikelijke afronding.

EINDE

1. Merk op dat de oneigenlijke integraal inderdaad convergent is vanwege $a < 1$ voor $x \rightarrow \infty$ en vanwege $a > 0$ voor $x \rightarrow -\infty$. Stel C_R de gegeven rechthoek. De functie $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ is analytisch behalve in de polen $\pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, en deze punten zijn enkelvoudige polen. Alleen πi is van belang (want in het inwendige van C_R), en met de residuenstelling vinden we

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz = \text{Res}_{z=\pi i} f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{z - \pi i}{1 + e^z} e^{az} = \frac{1}{-1} e^{a\pi i}$$

omdat

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{1 + e^z}{z - \pi i} = \frac{d}{dz} \Big|_{z=\pi i} e^z = -1.$$

Dus we vinden

$$\begin{aligned} -2\pi i e^{a\pi i} &= \oint_{C_R} f(z) dz = \\ &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(R+it)i dt + \int_R^{-R} f(x+2\pi i) dx + \int_{2\pi}^0 f(-R+it)i dt \end{aligned}$$

We schatten, voor $R > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(R+it)i dt \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{aR+ait}}{1+e^{R+it}} \right| dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1} dt \\ &= 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{want } a < 1 \end{aligned}$$

vanwege $|1+e^{R+it}| \geq |1-e^R| = e^R - 1$ (omgekeerde driehoeksongelijkheid), en evenzo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{2\pi}^0 f(-R+it)i dt \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{-aR+ait}}{1+e^{-R+it}} \right| dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} dt \\ &= 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{want } a > 0 \end{aligned}$$

vanwege $|1+e^{-R+it}| \geq |1-e^{-R}| = 1 - e^{-R}$ (omgekeerde driehoeksongelijkheid).

Merk op dat

$$\int_R^{-R} f(x+2\pi i) dx = - \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{a2\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$$

en als we dus $R \rightarrow \infty$ nemen dan krijgen we

$$\begin{aligned} -2\pi i e^{a\pi i} &= (1 - e^{a2\pi i}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \\ \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx &= \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{(1 - e^{a2\pi i})} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \end{aligned}$$

2. (a) Merk op dat $w = z/(z-1)$ een Möbius transformatie is, en de inverse is gegeven door $z = w/(w-1)$ (dezelfde Möbius transformatie!). Dus we hebben nodig $|w/(w-1)| > 1$ of $|w| > |w-1|$, dwz de afstand tot de oorsprong is groter dan de afstand tot 1 in het complexe vlak. Dit is het halfvlak $\operatorname{Re} w > \frac{1}{2}$. Bovendien $|w/(w-1)| < 2$, en $|w/(w-1)| = 2$ is een cirkel van Apollonius. Los hiervoor op $w_1 = 2(w_1-1)$ ofwel $w_1 = 2$ en $w_2 = -2(w_2-1)$ ofwel $w_2 = \frac{2}{3}$ (dan zijn w_1 en w_2 inverse punten voor de cirkel). Dan is het middelpunt $\alpha = \frac{1}{2}(w_1+w_2) = \frac{4}{3}$ en de straal $r = \frac{1}{2}|w_1-w_2| = \frac{2}{3}$. De oorsprong $w = 0$ voldoet aan $|w/(w-1)| < 2$, dus het is het buitengebied van de cirkel $|w - \frac{4}{3}| = \frac{2}{3}$.

(b) Als $\operatorname{Im} z = 0$, dan is z reëel, en is $w = z^2 \in [0, \infty)$. Als $\operatorname{Im} z = 1$, dan $w = (x+i)^2 = x^2 - 1 + 2ix$ en dit beschrijft een parabool in het complexe vlak. Het gevraagde gebied is het open gebied begrensd door deze parabool dat de positieve reële rechte bevat.

3. (a) De standaardsnede van de logaritmische is $(-\infty, 0]$. Nu is $1 + \frac{z}{z} = \frac{z+2}{z}$ een Möbiustransformatie, dus we vinden nu een snede voor deze functie als $w = \frac{z+2}{z} \in (-\infty, 0]$. Nu is $z = \frac{2}{w-1}$, en correspondeert $w \in (-\infty, 0]$ met $z \in [-2, 0]$. Dus de snede is $[-2, 0]$. Hier correspondeert $z = -2$ met het vertakkingspunt 0 van de logaritmische, en $z = 0$ correspondeert met het vertakkingspunt ∞ van de logaritmische. De functie $f(z) = \log|1 + \frac{z}{z}| + i \arg(1 + \frac{z}{z})$ met de waarden van het argument in $(-\pi, \pi)$.

(b) Uit het voorgaande volgt dat f holomorf is in de ring $|z| > 2$ (ofwel holomorf in een omgeving van ∞), en dit is de grootst mogelijke ring waarin f holomorf is. Door de machtreeksontwikkeling $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ te gebruiken, vinden we

$$f(z) = \log(1 + \frac{z}{z}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n z^n},$$

en dit is de gevraagde Laurentreeks. Merk op dat deze reeks absoluut convergent is voor $|z| > 2$, en uniform convergent voor $|z| > 2 + \epsilon$.

(c) Herschrijf $f(z) = \log(1 + \frac{z}{z})$ met $z = 2/(w-1)$, dan $\log(1 + \frac{z}{z}) = \log(w)$, en $|z| \geq r$ komt overeen met $|w-1| \leq 2/r$. Gebruik nu het maximum modulus principe voor de holomorfe functie $\log(w)$ voor $|w-1| < 1$. Hieruit volgt $M(r) = \max_{|w-1|=2/r} |\log(w)|$. Als $r \rightarrow \infty$, wordt de straal van de cirkel $|w-1| = 2/r$ willekeurig klein en dus gaat $w \rightarrow 1$. Vanwege de continuïteit volgt $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \log 1 = 0$.

(d) De inverse Laplace getransformeerde is $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tz} f(z) dz$ met a voldoende groot. Neem nu $a > 3$ en beschouw de contour Γ_R , $R > 3$, bestaande uit het lijnstuk van $a-iR$ tot $a+iR$, het lijnstuk u_R van $a+iR$ naar iR , de cirkelboog γ_R (middelpunt 0 en straal R) van iR naar $-iR$ en het lijnstuk l_R van $-iR$ naar $a-iR$. Dan geldt dat $\oint_C e^{zt} f(z) dz = \oint_{\Gamma_R} e^{zt} f(z) dz$, want C en Γ_R zijn homotope contours in de ring $|z| > 2$. Tot slot moeten we aantonen dat

$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} e^{zt} f(z) dz = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} f(z) dz$. Daarvoor moeten we de integralen over u_R , l_R en γ_R gaan schatten.

1 *Schatting op u_R* Dan is $z = x + ia$, $0 \leq x \leq a$, dus $|e^{zt}| = e^{xt} \leq e^{at}$.

$$\left| \int_{u_R} e^{zt} f(z) dz \right| \leq \text{lengte}(u_R) e^{at} M(R) = a e^{at} M(R) \rightarrow 0$$

als $R \rightarrow \infty$ vanwege Opgave 3c en het maximum modulus principe.

2 *Schatting op l_R* Dan is $z = x - ia$, $0 \leq x \leq a$, dus $|e^{zt}| = e^{xt} \leq e^{at}$.

$$\left| \int_{l_R} e^{zt} f(z) dz \right| \leq \text{lengte}(l_R) e^{at} M(R) = a e^{at} M(R) \rightarrow 0$$

als $R \rightarrow \infty$ vanwege Opgave 3c en het maximum modulus principe. (Of opmerkingen dat het volgt uit symmetrie.)

3 *Schatting op γ_R* Parametriseer $\gamma_R(\phi) = R e^{i\phi}$, $\frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi$. Dan $|e^{tR e^{i\phi}}| \leq e^{tR \cos \phi}$ en

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} e^{tz} f(z) dz \right| &\leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} M(R) e^{tR \cos \phi} R d\phi = 2R M(R) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-tR \sin \phi} d\phi \\ &\leq 2R M(R) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-tR \frac{2}{\pi} \phi} d\phi = 2R M(R) \frac{-\pi}{2tR} e^{-tR \frac{2}{\pi} \phi} \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} \\ &= \frac{\pi M(R)}{t} (1 - e^{-Rt}) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dus volgt $\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{zt} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{zt} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} f(z) dz$, de inverse Laplace getransformeerde.

(e) We kunnen nu de Laurentreeks van f gebruiken, en vanwege uniforme convergentie kunnen we sommatie en integratie verwisselen;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{zt} f(z) dz &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^n} dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big|_{z=0} e^{zt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n t^{n-1}}{n!} \\ &= \frac{-1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n t^n}{n!} = \frac{-1}{t} (e^{-2t} - 1) \end{aligned}$$

vanwege Cauchy's integraalformule voor de $n-1$ -ste afgeleide van een holomorfe functie.

4. Omdat u harmonisch is, is er een holomorfe functie f met $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dan gelden de Cauchy-Riemann vergelijkingen $u_x = v_y$ en $u_y = -v_x$, en $f'(x+iy) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$. Bereken

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3} \\ u_y(x, y) &= \frac{2y^3 - 6yx^2}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} u_x(x, y) - iu_y(x, y) &= \frac{6xy^2 - 2x^3 - i(2y^3 - 6yx^2)}{(x^2 + y^2)^3} = -2 \frac{(x - iy)^3}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= -2 \frac{\bar{z}^3}{(z\bar{z})^3} = \frac{-2}{z^3} \implies f(z) = \int \frac{-2}{z^3} dz = \frac{1}{z^2} + C \end{aligned}$$

Nu geldt

$$v_0(x, y) = \operatorname{Im} \frac{1}{(x + iy)^2} = \operatorname{Im} \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

en $v_0(1, 1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Dus kies $v(x, y) = v_0(x, y)$.

Omdat $\operatorname{Re} \frac{1}{(x+iy)^2} = u(x, y)$ vinden we $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

5. (a) Stel γ is een positief georiënteerde contour met $\gamma^* \cup I(\gamma) \subset G$, en f is holomorf op G behalve in eindig veel polen $a_1, \dots, a_N$ in het inwendige van γ . Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z).$$

- (b) Stel γ_1 het lijnstuk $[0, 2\pi]$, γ_2 het lijnstuk $[2\pi, 2\pi + 2\pi i]$, γ_3 het lijnstuk $[2\pi + 2\pi i, 2\pi i]$, en γ_4 het lijnstuk $[2\pi i, 0]$ (met deze oriëntatie). Vanwege de periodiciteit geldt $\int_{\gamma_1} f(z) dz = -\int_{\gamma_3} f(z) dz$ en $\int_{\gamma_2} f(z) dz = -\int_{\gamma_4} f(z) dz$. Omdat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ volgt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

- (c) Als het inwendige van Γ maar één pool bevat, zeg a , dan mbv de residuenstelling

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=a} f(z)$$

en deze laatste is ongelijk nul (vanwege de aanname dat alle polen enkelvoudig zijn). Dus moet er op zijn minst een tweede enkelvoudige pool zijn.

6. Gebruik de stelling van Rouché voor $\gamma(0; 1)$ (de eenheidscirkel). Stel $f(z) = -3z + 1$, en $g(z) = z^5$. Dan geldt voor $|z| = 1$

$$|f(z)| = |-3z + 1| \geq 3|z| - 1 = 2 > 1 = |z|^5 = |g(z)|$$

f en g zijn polynomen en dus holomorf. Dus f en $f + g$ hebben evenveel nulpunten in de open eenheidsschijf. $(f + g)(z) = z^5 - 3z + 1$ en $f(z) = -3z + 1$. Nu heeft f één nulpunt, nl. $\frac{1}{3} \in D(0; 1)$. Dus het gevraagde polynoom van de 5de graad heeft één nulpunt in de open eenheidsschijf $D(0, 1)$.