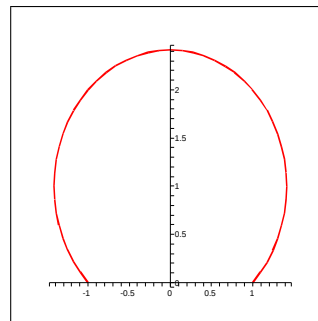


Bij elke vraag dient u het meest waarschijnlijke antwoord of de meest waarschijnlijke antwoorden te geven, en u dient uw keuze(s) te beargumenteren. U mag gebruik maken van een rekenmachine. Boek, telefoon en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

1. Het pad  $\gamma$  in het plaatje hiernaast is een *circline* pad van het punt  $-1$  naar het punt  $1$  in het complexe vlak  $\mathbb{C}$ .  $\gamma$  is een deel van een cirkel door  $-1$  en  $1$ , georiënteerd van  $-1$  naar  $1$  (met de klok mee). De uitkomst van de integraal  $\int_{\gamma} z^4 dz$  is

A.  $-\frac{2}{5}$ ; B.  $\frac{2}{5}$ ; C.  $2i\pi$ ; D.  $-2i\pi$ .



Antwoord:  $\frac{2}{5}$ .  $f(z) = z^4$  is holomorf op  $\mathbb{C}$ , dus we kunnen ook het pad  $[-1, 1]$  nemen.

2. Beschouw het halfvlak  $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$ . Welke van de volgende Möbius afbeeldingen beeldt  $V$  af op de open eenheidschijf  $D(0; 1)$ ?

A.  $f(z) = \frac{z+i}{iz+1}$ ; B.  $f(z) = \frac{iz+i}{z-1}$ ;  
C.  $f(z) = \frac{-z+1}{-iz+1}$ ; D.  $f(z) = \frac{iz-i}{z+1}$ .

Antwoord:  $f(z) = \frac{iz-i}{z+1}$ , en vanwege de tikfout in de noemer (geen  $i$  voor de  $z$ ) staat dit antwoord er niet tussen. Er zal coulant mee worden gegaan. Schrijf  $V$  als  $|z-1| < |z-i|$  of  $\frac{|z-1|}{|z-i|} < 1$  ofwel  $\frac{|iz-i|}{|iz+1|} < 1$ .

3. Welke van de volgende meerwaardige functies heeft geen vertakkingspunt in  $\infty$ ?

A.  $\llbracket \sqrt[4]{z} \rrbracket$ ; B.  $\llbracket \sqrt[3]{z(z^2-1)} \rrbracket$ ; C.  $\llbracket \log z \rrbracket$ ; D.  $\llbracket (z-\pi)^\pi \rrbracket$ .

Antwoord:  $\llbracket \sqrt[3]{z(z^2-1)} \rrbracket$ . Ga over door  $z \mapsto 1/z$ , dan  $\sqrt[3]{z^{-1}(z^{-2}-1)} = \sqrt[3]{z^{-3}(1-z^2)}$  heeft geen vertakkingspunt bij 0 omdat de macht van  $z$  onder  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$  een veelvoud is van 3. Je kunt natuurlijk ook opmerken dat de andere drie meerwaardige functies wel vertakken in  $\infty$ .

4. De convergentiestraal van de machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \frac{z^{2n}}{3^n}$  is gelijk aan

- A.  $\sqrt{3}$ ; B.  $\sqrt{3e}$ ; C. 9; D.  $9e^2$ .

Antwoord:  $\sqrt{3e}$ . Gebruik het quotiëntenkenmerk en de standaard limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ .

5. Beschouw de functie  $f(z) = \frac{z^3}{|z|^2}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , en  $f(0) = 0$ . Dan is  $f \notin H(\mathbb{C})$  omdat

- A.  $f$  voldoet niet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voor  $z = 0$ ;  
 B.  $f$  is niet differentieerbaar in  $z = 0$ ;  
 C.  $f$  is niet continu in  $z = 0$ ;  
 D.  $\int_{\gamma(0;1)} f(z) dz \neq 0$  en het gebruik van de Stelling van Cauchy.

Antwoord: er zijn hier meer mogelijkheden.

A Merk op

$$\frac{(x+iy)^3}{x^2+y^2} = \frac{x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)}{x^2+y^2}$$

zodat  $u(x,y) = \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}$ ,  $u(0,0) = 0$ , en  $v(x,y) = \frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}$ ,  $v(0,0) = 0$ . Dan  $u_x(0,0) = 1$ ,  $u_y(0,0) = 0$ ,  $v_x(0,0) = 0$ ,  $v_y(0,0) = -1$ . Dus de functie voldoet wel aan  $u_y = -v_x$  maar niet aan  $u_x = v_y$  in de oorsprong.

B  $f$  is niet differentieerbaar in 0;  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\frac{h^3}{|h|^2} - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h}$  bestaat niet.

C  $f$  is wel continu in  $(0,0)$ ;  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{|h|^2} = 0$  want  $|\frac{h^3}{|h|^2}| \leq |h|$

D  $\int_{\gamma(0;1)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} i e^{i\theta} d\theta = 0$

Dus A en B gelden.

6. Beschouw de complexe rij  $\{\alpha^n\}_{n=0}^\infty$  met  $\alpha = e^{2\pi iz}$ . Welke van de volgende uitspraken is waar? Hierbij wordt convergentie bedoeld naar waarden in  $\mathbb{C}$  (en niet  $\tilde{\mathbb{C}}$ ).

- A. De rij heeft een convergente deelrij voor elke  $z \in \mathbb{Q}$ ;
- B. De rij is convergent voor elke  $z \in \mathbb{C}$  met  $\text{Im } z < 0$ ;
- C. De rij is convergent voor elke  $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;
- D. Alléén voor  $z = 0$  is deze rij convergent.

Antwoord: De rij heeft een convergente deelrij voor elke  $z \in \mathbb{Q}$ . Als  $z = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ), dan  $\alpha^n = e^{2\pi i np/q}$ , dus  $\alpha^{nq} = e^{2\pi ip} = 1$  is een constante (dus convergente) deelrij. Alle andere uitspraken zijn niet waar.

7. Met de notatie en pad als in vraag 1. Dan is  $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz =$

- A.  $\frac{\pi}{2}$ ;   B.  $\frac{\pi}{2} + 2\pi i$ ;   C.  $\frac{\pi}{2} - 2\pi i$ ;   D.  $-\frac{\pi}{2}$ .

Antwoord:  $-\frac{\pi}{2}$ . De integraal  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+z^2} dz = \arctan(z)|_{-1}^1 = \frac{1}{2}\pi$ .  $[-1, 1]$  samenstellen met  $-\gamma$  (denk om oriëntatie!) geeft een positief geöriënteerde contour, zeg  $\gamma'$ , met  $i \in I(\gamma')$  en  $-i \in O(\gamma')$  en met Cauchy volgt

$$\oint_{\gamma'} \frac{1}{1+z^2} dz = -\frac{1}{2}i \oint_{\gamma'} \frac{1}{z-i} dz + \frac{1}{2}i \oint_{\gamma'} \frac{1}{z+i} dz = -\frac{1}{2}i 2\pi i + \frac{1}{2}i 0 = \pi.$$

Dus

$$\int_{-\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+z^2} dz = \pi$$

geeft  $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz = -\frac{1}{2}\pi$