

Opg. 1.

1.

$\text{im}(A) = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ waarbij v_i de i^e kolom van A is, maar $v_1 = v_3 = v_5 = v_7$ en $v_2 = v_4 = v_6 = v_8$ dus $\text{im}(A) = \text{span}(v_1, v_2)$ met $v_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)^T$ en $v_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)^T$. v_1 en v_2 zijn onafhankelijk dus $\text{rk}(A) = 2$.

2.

$Av_1 = 4v_1$ en $Av_2 = 4v_2$ dus $A(x_1v_1 + x_2v_2) = 4(x_1v_1 + x_2v_2)$ en $\text{im}(A)$ is een eigenruimte bij eigenwaarde 4.

3.

We hebben al 2 eigenvectoren bij eigenwaarde 4 en $\ker(A - 0I) = \ker(A)$ heeft dimensie 6 dus zijn er 6 onafhankelijke eigenvectoren bij eigenwaarde 0. Dus A is diagonaliseerbaar.

4.

A is diagonaliseerbaar, dus $M_A(x) = x(x - 4)$ het product van factoren $x - \lambda$ met 1 factor voor elke eigenwaarde λ .

5.

$p_A(x)$ heeft graad 8 en heeft factoren x^6 en $(x-4)^2$ want we hebben 6 eigenvectoren bij eigenwaarde 0 en 2 bij eigenwaarde 4. Dus $p_A(x) = x^6(x-4)^2$

Opg. 2.

Noem de matrix A_x . Als A_x nilpotent is dan $p_{A_x}(x) = x^3$ en het spoor van A_x is -1 keer het coëfficiënt van x in $p_A(x)$ dus $\text{sp}(A_x) = 6 - x = 0$. Dus A_6 kan als enige nilpotent zijn, in dat geval moet gelden dat $A_6^3 = 0$. Uitrekenen geeft $A_6^3 = 0$ dus A_6 is nilpotent en het antwoord is $x = 6$.

Opg. 3.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

Kan niet. Voor het bewijs kijken we naar de jordan normaal vorm van A . $A^2 = 0$ dus A is nilpotent met $p_A(x) = x^4$. Dus we hebben alleen blokken bij eigenwaarde 0. Als we een blok van grote 3 of 4 zouden hebben dan zou $A^2 = 0$ niet gelden. Een blok van grootte 1 geeft een lege kolom, dus daar kunnen we er maar maximaal 1 van hebben vanwege de rang van A . Dus hebben we minstens $3/2$ blokken van grootte 2, dus 2 blokken van grootte 2. Maar dan heeft A rang 2. tegenspraak.

2

4.

Kan niet. A heeft rang 2 dus hebben we 2 eigenvectoren met eigenwaarde 0 en $A - I$ heeft rang 1, dus hebben we 3 eigenvectoren met eigenwaarde 1. Dus 5 eigenvectoren in een 4 bij 4 matrix. tegenspraak.

5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 481 \end{pmatrix}$$

Opg. 4.

Noem de matrix A . Eerst berekenen we $p_A(x) = (x - 1)^4$, dus de enige eigenwaarde van A is 1. Nu berekenen we de eigenvectoren $\ker(A - I) = \text{span}(e_2, e_4)$ met $e_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ en $e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$. Dus hebben we 2 eigenvectoren en dus 2 blokken. Als we 2 blokken van grootte 2 hebben dan geldt dat $(A - I)^2 = 0$ en dat geldt hier niet. Dus hebben we een blok van grootte 1 en een blok van grootte 3. Dus

3. Dus

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opg. 5.

1.

$1, x, x^2$ spannen V op en zijn onafhankelijk, want $a \cdot 1 + bx + cx^2 = 0$ met $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b = c = 0$

2.

We berekenen de matrix die hoort bij T tov de basis $1, x, x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_A(x) = (x - 1)^3$ de gegeneraliseerde eigenruimte bij eigenwaarde 1 heeft dimensie 3 en is dus heel V .

3.

Merk op dat we hier 1 eigenvector hebben dus 1 blok van grootte 3 bij eigenwaarde 1.

4.

$D = I$, want het is een diagonalmatrix met eigenwaarden, dus bij 1 eigenwaarde ligt de matrix al vast.

$$N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.

$A^{100} = (D + N)^{100} = D^{100} + 100D^{99}N + 100 \cdot 99/2 D^{98}N^2$, want $N^3 = 0$. Dus $A^{100} = I + 100N + 50 \cdot 99N^2$ en

$$T^{100}(p_2) = (I + 100N + 50 \cdot 99N^2)(0, 0, 1)^T = \begin{pmatrix} 1 & -100 & 9900 \\ 0 & 1 & -200 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9900 \\ -200 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opg. 6.

1.

$p_A(x) = (x - 1)^2$ dus de gegeneraliseerde eigenruimte bij eigenwaarde 1 heeft dimensie 2 en is dus heel V .

2.

$D = I$, want het is een diagonalmatrix met eigenwaarden, dus bij 1 eigenwaarde ligt de matrix al vast.

$$N = A - I = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} e^A &= e^D e^N \\ &= (eI)(I + N + 1/2 N^2 + \dots) \\ &= e(I + N) \\ &= eA \end{aligned}$$

Opg. 7.

$p_A(x) = x^2(x - 2)^2$ en we zien 2 eigenvectoren met eigenwaarde 0, dus we hebben 2 blokken van grootte 1 bij eigenwaarde 0. Voor eigenwaarde 2 berekenen we eerst hoeveel eigenvectoren er zijn. $\dim(\ker(A - 2I)) = 1$ dus hebben we 1 eigenvector bij eigenwaarde 2 en dus 1 blok bij eigenwaarde 2. Dus

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opg. 8.

1.

Hiervoor gebruiken we de stelling uit Ex. 6.2 die zegt dat $\phi_0, \dots, \phi_n$ een basis vormt voor V_n^* en $1, \dots, x^n$ voor V_n als en slechts als $\det(\phi_{i-1}(x^{j-1}))_{ij} \neq 0$ en dat is zo want $(\phi_{i-1}(x^{j-1}))_{ij}$ is een onderdriehoeksmatrix zonder nullen op de diagonaal.

$$(\phi_{i-1}(x^{j-1}))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & n & n(n-1) & \dots & n! \end{pmatrix}$$

2.

Dit volgt uit het feit dat $(f \mapsto \int_{-1}^1 f(x)dx) \in V_n^*$ en $\phi_0, \dots, \phi_n$ is een basis voor V^*

Opg. 9.

$p_A(x) = (x-2)^4$ dus we gaan eerst zoeken naar eigenvectoren. Er blijken er 2 te zijn, dus we hebben 2 blokken. Verder geldt dat $(A-2I)^2 = 0$ dus zijn de blokken niet groter dan grootte 2. Dus

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Opg. 10.

1.

$p_A(x) = (x-3)^2$ dus A heeft eigenwaarde 3 en $\ker(A-3I) = \text{span}((2,1)^T)$ is de eigenruimte die daar bij hoort.

2.

$D = 3I$, want het is een diagonalmatrix met eigenwaarden, dus bij 1 eigenwaarde ligt de matrix al vast.

$$N = A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$A^n = (3I + N)^n = 3^n I + n3^{n-1}IN$, want $N^2 = 0$

Opg. 11.

1.

$$p_A(x) = x(x^2 - x - 1) - x = x(x-2)(x+1)$$

2.

Dat zijn dus 0, 2 en -1.

3.

Ja, 3 eigenwaarden dus 3 onafhankelijke eigenvectoren dus diagonaliseerbaar.

Opg. 12.

Voor alle $u \in U$ geldt dat $f^T(\phi)(u) = \phi(f(u)) = 0$ voor alle $\phi \in W^*$. Dus $\alpha_W(f(u)) = (\phi \mapsto \phi(f(u))) = (\phi \mapsto 0) = 0 \in V^{**}$. Dus $f(u) \in \ker(\alpha_W) = 0$ en dus geldt dat $f(U) \subset 0$ dus $f(U) = 0$.

Opg. 13.

1.

Dat volgt uit uit het feit dat $(f \mapsto f(a))$ lineair is voor alle $a \in \mathbb{R}$.

2.

$W = \text{span}(x \mapsto x, x \mapsto \sin(x), x \mapsto e^x)$ dus $\dim(W) \leq 3$. Verder geldt dat $\dim(\phi(W)) \leq \dim W$. $\phi(W) \subset \mathbb{R}^3$ dus $\dim \phi(W) \leq 3$ en $\phi(x \mapsto x), \phi(x \mapsto \sin(x)), \phi(x \mapsto e^x)$ zijn onafhankelijk. Dus $\dim \phi(W) \geq 3$. Dus $\dim(W) = \dim \phi(W) = 3$.

3.

$\dim W^* = \dim W = 3$ en $f \mapsto f(0), f \mapsto f(1), f \mapsto f(\pi)$ zijn onafhankelijk, anders zou $\dim \phi(W) < 3$ gelden. Dus $W^* = \text{span}(f \mapsto f(0), f \mapsto f(1), f \mapsto f(\pi))$ en er geldt dat $f \mapsto f'(0) \in W^*$.

Opg. 14.

$B(x+y, x+y) = B(x, x) + B(y, y) + 2B(x, y)$ dus we kiezen B zo dat $B(x, x) = B(y, y) = 0$ en $B(x, y) < 0$. Neem $V = \mathbb{R}^2$, $x = (1, 0)^T$, $y = (0, 1)^T$ en $B(x, y) = x^T A y$ met $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dan $B(x, x) = B(y, y) = 0$ en $B(x+y, x+y) = 2B(x, y) = -2 < 0$

Opg. 15.

We kiezen een basis u_1, u_2, v voor V met $u_1, u_2 \in U$ en $v \in V \setminus U$. Dan is de matrix van B gelijk aan

$$A = \begin{pmatrix} B(u_1, u_1) & B(u_2, u_1) & B(v, u_1) \\ B(u_1, u_2) & B(u_2, u_2) & B(v, u_2) \\ B(u_1, v) & B(u_2, v) & B(v, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B(v, u_1) \\ 0 & 0 & B(v, u_2) \\ B(u_1, v) & B(u_2, v) & B(v, v) \end{pmatrix}$$

B is gedegenerereerd precies als $\det(A) = 0$ en we zien dat A maximaal rang 2 heeft. Dus $\det(A) = 0$ en B is gedegenerereerd.

Opg. 16.

V is eindig dimensionaal dus α_V is een isomorfisme. Dat betekent dat $\alpha_V : v \mapsto (\phi \mapsto \phi(v))$ surjectief is en alle afbeeldingen in V^{**} van de vorm $(\phi \mapsto \phi(v))$ zijn. Neem nu $f \in V^*$ vast. Dan is $(\phi \mapsto B(f, \phi)) \in V^{**}$ dus $(\phi \mapsto B(f, \phi)) = (\phi \mapsto \phi(v))$ voor een bepaalde $v \in V$. Dus voor elke $f \in V^*$ is er een $v \in V$ met $B(f, g) = g(v)$ voor alle $g \in V^*$.

Opg. 17.

V is eindig dimensionaal dus $\alpha_V : v \mapsto (\phi \mapsto \phi(v))$ is een isomorfisme. Verder is B niet gedegeneerd, dus $B_L : v \mapsto (\phi \mapsto B(v, \phi))$ is ook een isomorfisme. Neem $f = \alpha_V^{-1} \circ B_L$. We zien dat f inderdaad een isomorfisme is. Verder geldt dat $f(v) \in V$ zodat $(\phi \mapsto \phi(f(v))) = \alpha_V(f(v)) = B_L(v) = (\phi \mapsto B(v, \phi))$. Dus $\phi(f(v)) = B(v, \phi)$.

Opg. 18.

1.

$(1, 0)A_1(1, 0)^T = 1 > 0$ dus $r > 0$ en $\text{rk}(A) = 1$ dus $r + s = 1$ dus $r = 1$ en $s = 0$.
Dis het signatuur van A_1 is 1.

$(1, 0)A_{-1}(1, 0)^T = -1 < 0$ dus $s > 0$ en $\text{rk}(A) = 1$ dus $r + s = 1$ dus $r = 0$ en $s = 1$.
Dis het signatuur van A_1 is -1 .

2.

A_x is psotief definitief precies als elke linksbovenvierkantsmatrix van A_x een positieve determinant heeft. Dus $x > 0$ en $x^2 - 1 > 0$ dus $x > 1$.

3.

Er geldt dan $x > 1$ en de determinant van deze matrix $(x - 3)(x - 1) > 0$. $x > 1$ dus $(x - 1) > 0$ en dus moet gelden $(x - 3) > 0$ dus $x > 3$.

Opg. 19.

1.

$(1, 1)A_0(1, 1)^T = 1 > 0$ en $(1, -1)A_0(1, -1)^T = -1 < 0$ dus $r > 0$ en $s > 0$ dus $r = 1$ en $s = 1$ dus het signatuur van A_0 is 0.

$(a, b)A_2(a, b)^T = 2a^2 + 2b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + (a + b)^2 > 0$ als $(a, b) \neq 0$ en dus is A_2 positief definitief. Dus $r = 2$ en het signatuur is 2.

2.

$(a, b)A_x(a, b)^T = xa^2 + xb^2 + 2ab = (x - 1)a^2 + (x - 1)b^2 + (a + b)^2$. Als $x > 1$ dan is dit positief. Als $x \leq 1$ dan nemen we $a = -b$, dan $(a, b)A_x(a, b)^T = -2(x - 1)a^2 \leq 0$ voor $a \neq 0$ dus A_x is positief definitief als en slechts als $x > 1$.

3.

Ten eerste geldt $x > 1$, verder moet de determinant $x(x^2 - 2) > 0$ dus $x > \sqrt{2}$

4.

$x > \sqrt{2}$ en de determinant van het linksboven 4x4 blok $x^2(x^2 - 3) > 0$ en de determinant $x^3(x^2 - 4) > 0$ dus $x > 2$

Opg. 20.

1.

W ligt vast bij x, y, z die verder vrij zijn. Dus is V als complexe vectorruimte 3 dimensionaal en $v_1 = (1, 0, 0, -i)^T$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ en $v_3 = (0, 0, 1, i)^T$ vormen een basis voor W .

2.

Omdat we niet met i kunnen vermenigvuldigen verdubbelt de dimensie met basis $v_1, v_2, v_3, iv_1, iv_2, iv_3$.

3.

We kunnen gram-schmidt toepassen op v_1, v_2, v_3 , maar dat is wel erg veel rekenwerk. Dus neem $y_1 = (1, 0, 0, -i)^T$ en $y_2 = (0, 1, i, 0)^T$ dan moeten we een oplossing vinden voor $x + iy - z - iw = 0$, $\langle (x, y, z, w), y_1 \rangle = x + iw = 0$ en $\langle (x, y, z, w), y_2 \rangle = y - iz = 0$. Dus $w = ix$ en $y = iz$ en $x + -z - z + x = 0$ dus $x = z$. We vinden de vector $y_3 = (1, i, 1, i)^T$. Nu is $y_1/\|y_1\|, y_2/\|y_2\|, y_3/\|y_3\|$ de orthonormale basis.

Opg. 21.

1.

$B(1, i) = \int_0^1 -idt = -i \neq iB(1, 1) = i$ dus nee.

2.

Ja, want $B(af + bg, h) = aB(f, h) + bB(g, h)$ en $B(f, ag + bh) = \bar{a}B(f, g) + \bar{b}B(f, h)$

3.

We moeten nagaan dat $B(f, g) = \overline{B(g, f)}$.

$$\begin{aligned}
 B(f, g) &= \int_0^1 f(t) \overline{g(1-t)} dt \\
 &= \int_0^1 f(1-u) \overline{g(u)} du \\
 &= \overline{\int_0^1 \overline{f(1-u)} g(u) du} \\
 &= \overline{\int_0^1 \overline{f(1-u)} g(u) du} \\
 &= \overline{B(g, f)}
 \end{aligned}$$

Dus B is hermitees/hermiets/hermitisch.

4.

Nee, neem $f(t) = t - 1/2$, dan $B(f, f) = \int_0^1 (t - 1/2)(1/2 - t) dt = -1/12$

Opg. 22.

We kiezen een slimme basis v_1, v_2, v_3 waarbij v_1 op de lijn ligt, en v_2 loodrecht op

v_1 en $v_3 = Av_2$. Dan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en dan $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ met rang 1.

Opg. 23.

We kiezen een basis bestaande uit vectoren $v_1, \dots, v_a$ uit de lineaire deelruimte en $u_1, \dots, u_b$ die daar loodrecht op staan. Dan is de matrix van de spiegeling

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en dus symmetrisch.

Opg. 24.

2.

We nemen eerst een vector loodrecht op $v_1 = (2, -1, 1)$, namelijk $v_2 = (1, 2, 0)$ en dan lossen we op $2x - y + z = 0$ en $x + 2y = 0$. We vinden $v_3 = (x, y, z) = (-2, 1, 5)$. v_1 is een eigenvector bij eigenwaarde 1 en v_2 en v_3 bij eigenwaarde -1 .

1.

Bij de basis v_1, v_2, v_3 is de matrix van σ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dus bij de standaard basis is de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

3.

Bij de basis van eigenvectoren geldt dat $A = A^T$ dus $AA^T = A^T A$ dus σ is normaal.

Opg. 25.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

Neem C de matrix van f , dan $q(f(u, v)) = (u, v)C^T AC(u, v)^T$ waarbij $D = C^T AC$ een diagonaalmatrix is. Dus moeten we orthonormaal diagonaliseren. $p_A(x) = (x - 15)(x + 5)$ en $v_{15} = (2, -1)^T$ is de eigenvector bij eigenwaarde 15. Dan is $v_5 = (1, 2)^T$

de eigenvector bij eigenwaarde 5. Er geldt dat $A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dus nemen we $C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en $a = 15$ en $b = -5$

3.

$q(x, y) = q(f(u, v))$ voor bepaalde $u, v \in \mathbb{R}$ met $u^2 + v^2 = 1$ dus de waarde zitten tussen -5 en 15 .