Note Title 20-4-2012

Oplossingen WI2608 20/4/2012

1. Laat $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als winkel } j \in W \text{ wordt toegewezen aan dc } i \in D \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

$y_i := \begin{cases} 1 & \text{als dc } i \in D \text{ wordt gebouwd} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

Model:

$$\min \sum_{i\in D} f_i y_i + \sum_{i \in D}\sum_{j\in W} c_{ij} x_{ij}$$

odv

$$\sum_{i\in D} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in W$$

$$\left(\quad x_{ij} - y_i \leq 0 \quad \forall i \in D, j \in W \quad \right)$$

$$\sum_{j\in W} x_{ij} \leq u_i y_i \quad i \in D$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in D, j \in W$$

2 a) Vermenigvuldig 2e voorwaarde met -1, voeg slackvar. toe $\Rightarrow$

2a) min $z = 3x_1 - x_2 + x_3$

o.d.v.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + s_1 &= 2 \\
x_1 + 2x_2 + s_2 &= 1 \\
-x_2 + x_3 + s_3 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
$-z$	0	3	-1	1				$r_0 + \frac{1}{2}r_2$
s_1	2	1	1	-1	1			$r_1 - \frac{1}{2}r_2$
s_2	1	1	2			1		$r_2/2$
s_3	0		-1	1			1	$r_3 + \frac{1}{2}r_2$
$-z$	1/2	7/2		1		1/2		
s_1	3/2	1/2		-1	1	-1/2		
x_2	1/2	1/2	1			1/2		
s_3	1/2	1/2		1		1/2	1	

Oplossing optimaal, want $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z^* = -1/2$$

2b) max $2\pi_1 - \pi_2$

o.d.v.

$$
\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_2 &\leq 3 \\
\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 &\leq -1 \\
-\pi_1 + \pi_3 &\leq 1 \\
\pi_1 \leq 0, \ \pi_2 \geq 0, \ \pi_3 &\leq 0
\end{aligned}
$$

3 a) $\Leftarrow$) Als $\hat{x}, \hat{y}$ optimaal, dan volgen de compl. slacknessvoorw. :

$\hat{y}$ toegelaten:

Duale voorw.: $c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i$

vermenigvuldig $\hat{x}_j \ (\geq 0)$

$$\underbrace{c_j \hat{x}_j \leq}_{\text{ok want } \hat{x}_j \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right) \hat{x}_j$$

ok want $\hat{x}_j \geq 0$

sommeer over $j \Rightarrow$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j}_{z(\hat{x})} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right) \hat{x}_j}_{(*)}$$

Doe hetzelfde vanuit de primale voorwaarden:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \hat{y}_i}_{(**)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i}_{w(\hat{y})}$$

Merk op dat de uitdrukkingen $(*)$ en $(**)$ zijn gelijk.

Hieruit volgt:

$$z(\hat{x}) \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right) \hat{x}_j \qquad (1)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \hat{y}_i \qquad (2)$$

$$w(\hat{y}) \qquad (3)$$

Dualiteitsstelling zegt nu dat als opl. $\hat{x}, \hat{y}$ optimaal zijn, dan geldt

$$z(\hat{x}) = w(\hat{y}).$$

$\hat{x}, \hat{y}$ optimaal impliceert daarom dat

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right) \hat{x}_j \qquad (4)$$

en $$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \hat{y}_i = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i \qquad (5)$$

Herschrijven van (4) & (5) geeft resp.

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i - c_j \right) = 0 \qquad (6)$$

en $$\sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) = 0 \qquad (7)$$

Omdat $\hat{x}, \hat{y}$ toegelaten, geldt

$$\hat{x}_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i - c_j \geq 0$$

en $$\hat{y}_i \geq 0, \quad b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{y}_i \geq 0$$

Hierwit volgt dat

$$\hat{x}_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i - c_j\right) = 0, \quad j=1,\dots,n$$

en $$\hat{y}_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\right) = 0 \quad i=1,\dots,m$$

$\Rightarrow$)
Als complementary slacknessvoorw. gelden, dan zijn $\hat{x}, \hat{y}$ optimaal:

Complementary slackness $\Rightarrow$ (6) & (7) gelden, oftewel dat $z(\hat{x}) = w(\hat{y})$. Omdat $z(\hat{x}) \leq w(\hat{y})$ voor elk toegelaten primaal-duaal paar, impliceert $z(\hat{x}) = w(\hat{y})$ dat $\hat{x}, \hat{y}$ optimaal.

3 b) i. waar
ii. waar
iii. niet waar
iv. waar

4 a) P = verzameling beslissingsproblemen die in polynomiale tijd oplosbaar zijn

NP = verz. beslissingspr. die in polyn. tijd verifieerbaar zijn
= " " Π: $\forall$ ja-instantie I, $\exists$ certificaat c(I) en polynomiale alg. om geldigheid van c(I) na te gaan

NP-volledig = verz. beslissingsproblemen $\Pi \in NP$ zdd voor alle problemen $\bar{\Pi} \in NP$ geldt dat $\bar{\Pi} \propto \Pi$

4b) Indep. set $\in$ NP, want een independent set oplossing kan in polyn. tijd worden geverifieerd. We hoeven alleen na te gaan dat geen enkel paar vertices in I verbonden zijn door een kant in E'.

Reductie:

CLIQUE $\propto$ INDEP. SET:

Gegeven een instantie van CLIQUE, construeer de volgende instantie van INDEP. SET:

$$\left.\begin{array}{l} V' = V \\ E' = \{ \{i,j\} : i \neq j, \{i,j\} \notin E \} \\ k' = k \end{array}\right\} \text{"complementary graph" } \bar{G}$$

Een stelling zegt: $W \subseteq V$ is een clique in G d.e.s.d.a W is een indep. set in $\bar{G}$.

5) x_2-rij: $\frac{3}{4}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}s_3 = \frac{15}{4}$

$$\left(0+\frac{3}{4}\right)x_1 + x_2 + \left(-1+\frac{3}{4}\right)e_2 + \left(0+\frac{1}{4}\right)s_3 = 3+\frac{3}{4}$$

$$x_2 - e_2 - 3 = \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}e_2 - \frac{1}{4}s_3}_{\leq 0}$$

Gomory cut:

$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{4}e_2 + \frac{1}{4}s_3 \geq \frac{3}{4}$$

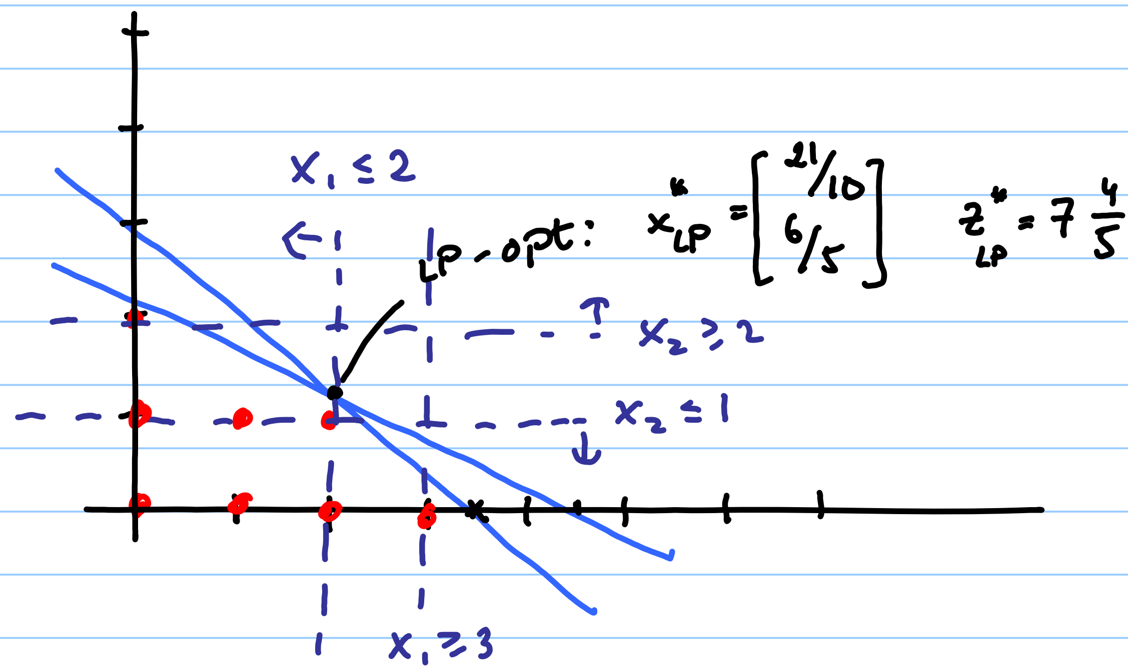
x_3-rij: $\frac{5}{2}x_1 + x_3 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}s_3 = \frac{5}{2}$

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)x_1 + x_3 + \left(0+\frac{1}{2}\right)e_2 + \left(0+\frac{1}{2}\right)s_3 = 2+\frac{1}{2}$$

$$2x_1 + x_3 - 2 = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}s_3}_{\leq 0}$$

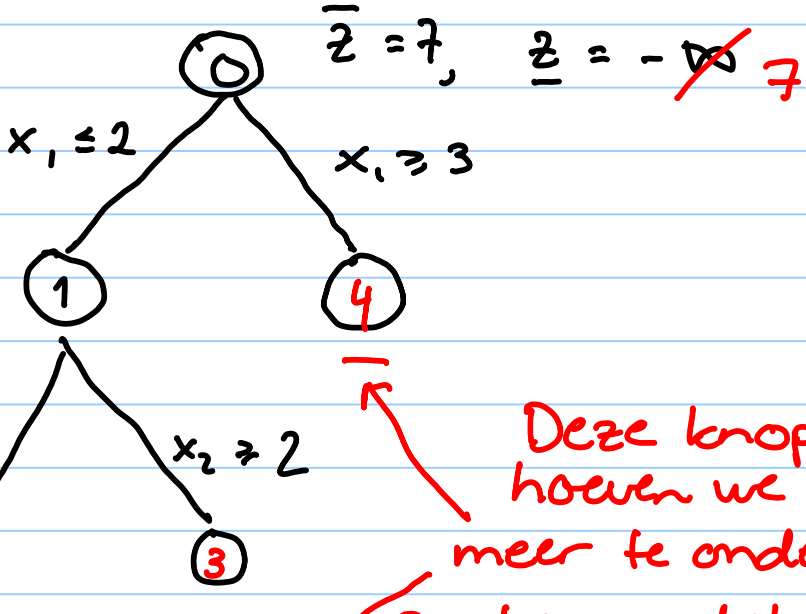
Gomory cut: $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}s_3 \geq \frac{1}{2}$

6)



$$z^*_{LP} = 7\tfrac{4}{5} \Rightarrow z^*_{IP} \leq 7$$

geheelt. doelf. coëff.



$x^*_{LP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/4 \end{bmatrix}$

$z^*_{LP} = 7\frac{3}{4}$

$\bar{z} = 7$

$x^*_{LP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$z_{LP} = 7 \quad \underline{z} = \bar{z} = 7$

Deze knopen hoeven we niet meer te onderzoeken omdat we al in knoop 0 weten dat $\bar{z} = 7$, en omdat we in knoop 2 een toegelaten oplossing hebben gevonden met waarde 7 (dwz $\underline{z} = 7$).

De optimale doelfunctiewaarde moet daarom gelijk aan 7 zijn en deze waarde wordt gerealiseerd door de oplossing

$$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$