Oplossingen, tentamen WI2608/BK1

Note Title 16-1-2012

op 16 januari, 2012.

1 a) $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als order } j \text{ door medewerker } i \text{ wordt afgehandeld} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

z_i = totale werktijd medewerker i

z = tijdstip wanneer laatste werknemer klaar is

b) $$z_i = \sum_{j=1}^{n} t_j x_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m$$

c) min z

odv

$$z \geq z_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

(z geeft aan wanneer de laatste medewerker klaar is)

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} t_j x_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m$$

(z_i geeft aan wanneer medewerker i klaar is)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

(elke order moet precies één keer verwerkt worden)

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$z, z_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

2a Los het Simplex fase I probleem op.

$$\min \ w = a_2 + a_3$$

odv

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 4x_2 - x_3 + s_1 \quad &= 70 \\
x_1 + x_2 - x_3 \quad + a_2 &= 10 \\
x_1 + x_2 \quad - s_3 + a_3 &= 16
\end{aligned}
$$

$$x_j \geq 0 \ \forall j, \ s_1, s_3, a_2, a_3 \geq 0$$

Druk a_2 & a_3 uit in niet-basisvar.:

$$a_2 = 10 - x_1 - x_2 + x_3$$
$$a_3 = 16 - x_1 - x_2 + s_3$$

$$a_2 + a_3 = 26 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_3$$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_3	a_2	a_3	
$-w$	-26	-2	-2	1		1			$r_0 + 2r_2$
s_1	70	4	4	-1	1				$r_1 - 4r_2$
a_2	10	1	1	-1			1		r_2
a_3	16	1	1			-1		1	$r_3 - r_2$
$-w$	-6			-1		1	2		$r_0 + r_3$
s_1	30			3	1		-4		$r_1 - 3r_3$
x_1	10	1	1	-1			1		$r_2 + r_3$
a_3	6			1		-1	-1	1	r_3
$-w$	0						1	1	
s_1	12				1	3	-1	-3	
x_1	16	1	1			-1		1	
x_3	6			1		-1	-1	1	

Optimum fase I, want $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$.

$a_2 = a_3 = 0$ in optimum $\Rightarrow$ bfs gevonden

Een toegelaten basisoplossing is:

$$x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \text{met waarde } z = 20$$

(b) (i) Het duale probleem:

$$(D) \qquad \min \ w = 10\pi_1 + 7\pi_2 + 2\pi_3$$

$$\text{odv} \quad \begin{array}{rrrrl} \pi_1 & & -\pi_3 & \geq 1 & (1) \\ \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & \geq 2 & (2) \\ \pi_1 & -3\pi_2 & +\pi_3 & \geq -1 & (3) \end{array}$$

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0$$

(ii) $x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Duale voorwaarden (1) & (2) voldoen met gelijkheid

$$\begin{array}{rrrl} \pi_1 & & -\pi_3 = 1 & (1') \\ \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 = 2 & (2') \end{array}$$

Er is slack in primale voorw. (2) $\Rightarrow$ $\pi_2 = 0$.

Los nu (1') en (2') op: $\begin{array}{l} \pi_1 - \pi_3 = 1 \\ \pi_1 + \pi_3 = 2 \end{array}$

$$\Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{3}{2}, \quad \pi_3 = \frac{1}{2}$$

Optimale duale oplossing is $\pi^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

met $w^* = 10 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 16$

3 a) (D) $\Rightarrow$

$$c_j \hat{x}_j \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right) \hat{x}_j \qquad (\text{want } \hat{x}_j \geq 0)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right) \hat{x}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \hat{y}_i \qquad (*)$$

(P)

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \hat{y}_i \leq b_i \hat{y}_i \qquad (\text{want } \hat{y}_i \geq 0)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \hat{y}_i}_{= (*)} \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$$

(b)

(i) waar   (ii) niet waar

(iii) niet-waar   (iv) waar

(v) waar

4 (a) P = verzameling beslissingsproblemen die in polynomiale tijd oplosbaar zijn

NP = verz. beslissingspr. die in polyn. tijd verifieerbaar zijn
= " " Π: $\forall$ ja-instantie I, $\exists$ certificaat $c(I)$ en polynomiale alg. om geldigheid van $c(I)$ na te gaan

NP-volledig = verz. beslissingsproblemen $\Pi \in NP$ zdd voor alle problemen $\bar{\Pi} \in NP$ geldt dat $\bar{\Pi} \propto \Pi$

(b) 0-1 IP $\in$ NP, want lineaire vergelijkingen in 0-1 variabelen zijn polyn. verifieerbaar.

Reductie:

SAT $\propto$ IP: Gegeven een instantie van SAT, construeer de volgende instantie van IP:

$$\text{Laat} \quad y_j = \begin{cases} 1 & \text{als } x_j \text{ "waar" is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Voor elke "clause" C_i eisen we dat er tenminste een variabele is met waarde 1

$$\Rightarrow \forall \text{ Clause } C_i: \sum_{\{j : x_j \in C_i\}} y_j + \sum_{\{j : \bar{x}_j \in C_j\}} (1 - y_j) \geq 1$$

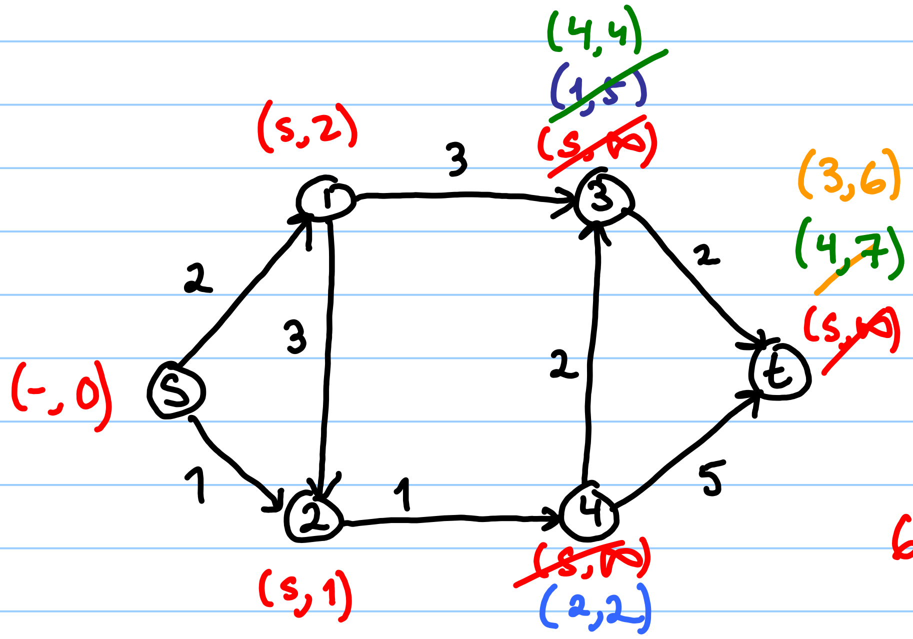
Voeg daarna excessvariabelen toe

Deze transformatie is polynomiaal

Als SAT ja-instantie : ∃ tenminste een "term" (y_j of $(1-y_j)$) met waarde 1 in elke voorwaarde van IP

Als IP ja : Elke clause is waar

5



Iteratie 0-1
Iteratie 2
Iteratie 3
Iteratie 4
Iteratie 5

6pt

Het kortste pad is (s,2,4,3,t) met lengte 6

6) (i) Als de LP-relaxatie in knoop j een geheeltallige optimale oplossing heeft, of

(ii) als de LP-relaxatie in knoop j niet-toegel. is, of

(iii) als de waarde van de ondergrens $\underline{z}^j$ gebaseerd op de waarde v/d LP-relaxatie in knoop j, z^j_{LP}, voldoet aan

$$\underline{z}^j \geq \bar{z} := \text{de waarde van de beste toegel. opl. tot nu toe}$$

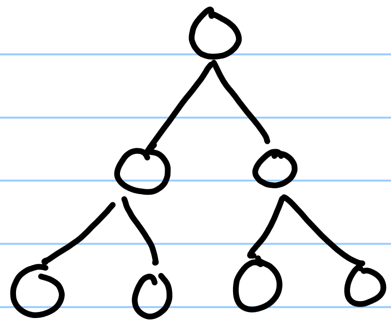
(b) Op "niveau" k van de boom (k=0 ⇒ wortel van de boom) hebben we 2^k knopen

k=0 :

k=1

k=2

⋮



⇒ totaal # knopen is:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$