

①

$$\underline{a} \quad H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{(s+3)(s-1)}{s^3 + 5s^2 + 12s + 15 + k}$$

W12609

25-06-13

$$\underline{b} \quad H(s)|_{k=3} = \frac{s-1}{s^2 + 2s + 6} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$H(s)|_{k=-33} = \frac{s+3}{s^2 + 6s + 18} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x$$

$\subseteq$ $H(s)$ is stabiel voor $-15 < k < 45$

② De eigenwaarden van A zijn: $\alpha-1$, $-2+\alpha$ en $-2-\alpha$
a en liggen allen in het linker half-vlak als $-2 < \alpha < 1$.

$$\underline{b} \quad R = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4+\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 4\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } R \leq 2 < 3$$

$\Rightarrow$ voor geen enkele $\alpha \in \mathbb{R}$ regelbaar.

$$\underline{c} \quad W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & \alpha \\ \alpha & \alpha-2 & -2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } W = 3$$

Voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ waarn neembaar voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\underline{d} \quad R|_{\alpha=1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Neem } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } \tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = B \text{ en } \tilde{C} = CT = C.$$

③ a Neem bv $x_1 = \theta$ en $x_2 = \dot{\theta}$, dan

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_2) \\ \dot{x}_2 = -2\zeta x_2 - x_2^3 - x_1 = f_2(x_1, x_2), \quad 0 \leq \zeta < 1 \end{cases}$$

Evenwichtspunten: $\dot{x}_1^* = 0 \Rightarrow x_2^* = 0$

$$\dot{x}_2^* = 0 \Rightarrow x_1^* = 0$$

b

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix}$$

Voor $\zeta = 0$: $A|_{\zeta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{eig.} = \pm i \Rightarrow \underline{\text{geen concl.}}$

Voor $0 < \zeta < 1$: $A|_{0 < \zeta < 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \Rightarrow \text{eig.} = -\zeta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2 - 4}$
reel deel < 0 voor $0 < \zeta < 1$
 $\Rightarrow \underline{\text{lokaal asymp. stabiel}}$

$$\subseteq V(0,0) = 0 \quad \&$$

$$V(\theta, \dot{\theta}) \geq 0 \text{ voor alle } (\theta, \dot{\theta}) \neq (0,0) \quad \&$$

$$\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) = -2\zeta \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^4 \leq 0 \text{ voor alle } (\theta, \dot{\theta}) \quad \&$$

$$\Rightarrow V \text{ is Lyapunov functie.} \quad \text{en } \zeta \in [0,1)$$

d Voor $\zeta \in [0,1)$ $\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) \leq 0$ maar niet strikt kleiner
Nee dus.

④ Eigenwaarden A zijn $-2, -2$, en $3 \leftarrow$ anstabiel

a Voor $\lambda = 3$, $\text{rang}[\lambda I - A \ B] = \text{rang} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3$

$\Rightarrow$ stabiliseerbaar.

④ (vervolg)

b Neem $F = [f_1 \ f_2 \ f_3]$ en stel $\det(\lambda I - (A + BF)) = (\lambda + 2)^3$
 $\Rightarrow F = [-5 \ 0 \ 2 \frac{1}{2}]$

c Voor $\lambda = 3$, $\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$

$\Rightarrow$ detectable

d Nee, want het systeem is niet waarneembaar wat
byv. volgt uit

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}_{\lambda = -2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

(er zal dus altijd minstens een eigenwaarde op -2
blijven liggen, wat voor K er ook gekozen wordt)

⑤

a Niet waar (zie byv. ③)

b Niet waar. Neem byv. $A = -1$ en $B = 0$, dan (A, B)
stabiliseerbaar maar $(A^2 = +1, B)$ niet.

c Waar. Beide matrices hebben dezelfde eigenwaarden.
Daarnaast zijn het aantal eigenvectoren en
gegeneraliseerde eigenvector hetzelfde.

e Waar. (C, A) waarneembaar $\Leftrightarrow$ eigenwaarden
van $A - \tilde{K}C$ kunnen overal geplaatst worden $\Leftrightarrow$ de
eigenwaarden van $A - kC - \tilde{K}C$ kunnen overal geplaatst
worden (neem $\tilde{K} = \tilde{K} - k$) $\Leftrightarrow (C, A - kC)$ is waarneem-
baar.

d Niet waar. Neem byv. $H_1(s) = \frac{1}{s+1}$ en $H_2(s) = \frac{1}{s-1}$, dan
 $H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{2s}{(s+1)(s-1)} \rightarrow$ instabiel.

