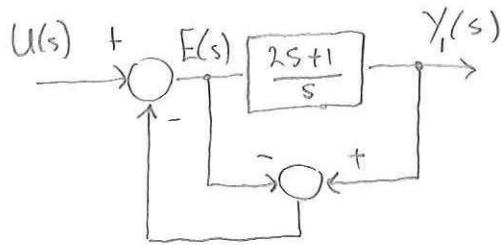


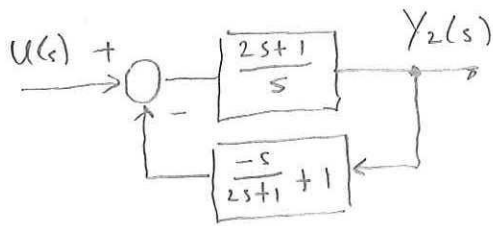
①

a)



$$Y_1(s) = \frac{2s+1}{s} E(s)$$

$$E(s) = U(s) - (Y_1(s) - E(s)) \Rightarrow Y_1(s) = U(s)$$



$$Y_2(s) = \frac{\frac{2s+1}{s}}{1 + \left(\frac{2s+1}{s}\right)\left(\frac{-s}{2s+1} + 1\right)} U(s) = 1 \cdot U(s) = Y_1(s)$$

$$Y(s) = Y_1(s) + U(s) - Y_2(s) = U(s) \Rightarrow H(s) = 1 \quad (8 \text{ pt})$$

b) proper, graad teller = graad noemer (2 pt)

②

a)

$$R = [B \mid AB \mid A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(R) = 1$$

$\Rightarrow$ niet regelbaar.

Basis voor regelbare deelruimte: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (6 pt)

b)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6 \text{ pt})$$

c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ is niet in de kolomruimte van $\tilde{R} \Rightarrow x(0)$ kan dus niet naar 0 geregeld worden in een eindige tijd. (6 pt)

$$d) H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

Merk op dat $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow sI - \tilde{A} = \begin{bmatrix} sI_1 - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & sI_2 - \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (6\text{pt})$$

e) BIBO stabiel want $H(s)$ heeft slechts een pool in $s = -1$
 Voor asymptotische stabiliteit moeten alle eigenw. van A in het LHV liggen:

$$\begin{aligned} |sI - A| &= |sI - \tilde{A}| = |sI_1 - \tilde{A}_{11}| \cdot |sI_2 - \tilde{A}_{22}| \\ &= (s+1)(s^2+1) = 0 \Rightarrow \text{e.w. liggen op } \{-1, i, -i\} \\ &\Rightarrow \text{stelsysteem niet asymptotisch stabiel.} \quad (6\text{pt}) \end{aligned}$$

3) a) Stel $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, dan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (**)$$

$$\text{evenwichtspunten: } \left. \begin{aligned} \dot{x}_1^* &\equiv 0 \Rightarrow x_2^* = 0 \\ \dot{x}_2^* &\equiv 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0, 0) \quad (5\text{pt})$$

b) lineairiseren rond $(0, 0)$ geeft

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5\text{pt})$$

e.w. op reële as $\Rightarrow$ geen conclusie mogelijk.

$$\left. \begin{aligned} V(0,0) &= 0 \\ V(x_1, x_2) &> 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0,0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow V \text{ positief definitief}$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -bx_2^4 \leq 0 \quad \forall x_1, x_2$$

(6pt)

V is
 een Lyapunov
 functie

3) cont'd.

d) $\dot{V}$ is slechts negatief definitief, dus op basis van Lyapunov's directe methode alleen stabiliteit. (4pt)

(Merk op dat als $x_2 \rightarrow 0$, dan ook $x_1 \rightarrow 0$, wat volgt uit (**)! $(0,0)$ is dus asymptotisch stabiel)

4

a) Merk op dat $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right]$, met $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en $A_{22} = -2$ en dus $e^{At} = \left[\begin{array}{c|c} e^{A_{11}t} & 0 \\ \hline 0 & e^{A_{22}t} \end{array} \right]$.

Via Laplace transformatie* $e^{A_{11}t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A_{11})^{-1} \right\}$

$$(sI - A_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Breuksplitsen van $\frac{1}{(s-1)(s+1)}$ levert

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+1} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1}$$

Dus

$$e^{A_{11}t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

en uiteindelijk

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (10 \text{ pt})$$

* kan ook via Jordan vorm natuurlijk, wel meer werk.

b)

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5 \text{pt})$$

$$= \frac{1}{s-1} \Rightarrow \text{stelsysteem niet BIBO stabiel} \Rightarrow \text{stelsysteem niet asymptotisch stabiel.}$$

$$(\text{eig}\{A\} = \{+1, -1, -2\}).$$

c) graad noemer $H(s) = 1 < \text{orde systeem} = 3 \Rightarrow$ systeem niet regelbaar. Dit volgt ook uit

$$R = [B \mid AB \mid A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Desalniettemin, wordt}$$

x_1 door u beïnvloed via blok $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en dus kan de e.w. $+1$ worden gestabiliseerd (dit volgt ook uit de Hautastest). Stel $u = [f, 0 \ 0]x$, dan wordt het gesloten-lus systeem (10pt)

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [f, 0 \ 0] X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1+f & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} X$$

$$\Rightarrow f_1 = -2 \text{ geef } \text{eig}\{A_{cl}\} = \{-1, -1, -2\}$$

d)

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(W) = 2 \Rightarrow \text{niet waarneembaar. Maar de instabiele}$$

(5pt)

mode is detecteerbaar (zie ook transfer functie); geen probleem dus voor ontwerp waarnemer.