

Tussentoets Inleiding Statistiek (WI2615)

1 november 2010

Afdeling Toegepaste Wiskunde, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

1. a) Zij $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen met verwachting gelijk aan nul en eindige variantie σ^2 . Laat zien dat $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ een *zuivere* schatter is voor σ^2 .

- b) Beschouw een populatie van N getallen $x_1, x_2, \dots, x_N$ en noteer

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Aselect worden twee trekkingen uit de populatie gedaan, *met* teruglegging. De stochastische variabelen corresponderend met de eerste en tweede trekking worden respectievelijk X_1 en X_2 genoemd. Laat zien dat

$$E(X_2 | X_1) = \frac{N\mu - X_1}{N-1}.$$

- c) Laat zien dat als T een schatter is voor een parameter θ , de Mean Squared Error (MSE) kan worden opgesplitst in een gekwadrateerde bias- en een variantieterm:

$$E(T - \theta)^2 = (ET - \theta)^2 + \text{Var}(T).$$

2. Zij $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen, allemaal met dezelfde exponentiële dichtheid

$$f(x | \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

De parameter $\theta > 0$ is onbekend.

- a) Leid de maximum likelihood schatter voor θ af.

- b) Leid de momentenschatter voor θ af.

- c) De Gamma(α, β) kansdichtheid wordt gegeven door

$$f(x | \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Hier is $\alpha > 0$ en $\beta > 0$. De functie Γ is gedefinieerd als $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$. Het is bekend dat de verwachting van deze verdeling gelijk is aan α/β . Stel dat we een Gamma(α, β)-a priori verdeling voor (de in deze aanpak stochastisch veronderstelde) Θ kiezen. Bereken de (Bayesiaanse) posterior mean schatter voor θ .

3. Zij $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen, allemaal met dezelfde Poisson verdeling

$$P_\theta(X = x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

voor een $\theta > 0$. Gegeven is dat voor zo'n stochastische variabele geldt $EX = \text{Var}(X) = \theta$.

- Laat zien dat de klasse van Poissonverdelingen met $\theta > 0$ een exponentiële klasse van verdelingen is. Bepaal vervolgens de voldoende statistiek voor θ , gebaseerd op $X_1, X_2, \dots, X_n$, die uit deze constatering volgt.
 - De maximum likelihood schatter voor θ is gelijk aan $\bar{X}_n$. Geef aan hoe je met behulp van de (parametrische) bootstrap een 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ kunt berekenen.
 - Bereken de Cramér-Rao variantie-ondergrens voor zuivere schatters van θ en ga na of de maximum likelihood schatter in dit model efficiënt is, in de zin dat deze onder alle zuivere schatters een minimale variantie heeft.
4. a) Formuleer de Rao-Blackwell-stelling.
- b) Leg uit wat het volgende stukje R-code doet:

```
alpha <- 2
beta <- 5
x <- rgamma(15,alpha,beta)
fitdistr(x,'normal')
```

Normering:

1a: 3	1b: 3	1c: 4	2a: 4	2b: 3	2c: 3	3a: 4	3b: 3	3c: 4	4a: 3	4b: 2
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Het cijfer C voor de tussentoets wordt als volgt bepaald (en afgerond):

$$C = \frac{\text{aantal punten} + 4}{4}$$

Veel succes!