Proeftentamen Logica (wi3607)
13-6-2013; 3 uur.

Meerkeuze vragen

Bij de meerkeuze vragen het juiste antwoord te geven is voldoende.

(1) 1. De propositievorm $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow A$ is

(a) tautologie

(b) contradictie

(c) geen tautologie en geen contradictie

(d) tautologie en contradictie

(1) 2. Bepaal welke verzameling van connectieven adequaat is:

(a) $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

(b) $\{\neg, \vee\}$

(c) $\{\neg, \Leftrightarrow\}$

(d) $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

(1) 3. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:

(a) Volgens de Onvolledigheidsstelling van Gödel bestaat in de theorie L van de propositielogica een onbewijsbare gesloten wf.

(b) De propositielogica L is consistent.

(c) Niet elke tautologie is bewijsbaar.

(d) Niet elke stelling is een tautologie.

(1) 4. De term $f_1^2(x, y)$ is *niet* vrij voor x in

(a) $A_1^2(x, y) \Rightarrow (\forall y)A_1^1(y)$

(b) $(\forall y)A_1^2(x, y)$

(c) $(\forall x)A_1^2(x, y)$

(d) $(\forall y)A_1^1(y) \Rightarrow A_1^2(x, y)$

(1) 5. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:

(a) Zij $\mathcal{B}$ een gesloten wf in de theorie S van de Peano-rekenkunde. Als niet-$\vdash_S \neg\mathcal{B}$ dan $\vdash_S \mathcal{B}$

(b) Laat M_1 en M_2 twee modellen van eerste-orde theoriën zijn. Als $M_1 \subseteq M_2$ en als M_1 en M_2 isomorf zijn dan zijn M_1 en M_2 identiek.

(c) De Compactheidsstelling is een gevolg van de Volledigheidsstelling van Gödel maar niet omgekeerd.

(d) Alle beweringen in onderdelen (a), (b) en (c) zijn niet waar.

Zie ook de volgende bladzijde.

(1) 6. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:

(a) Geen filter op een eindige verzameling is vrij.

(b) Er is een vrij ultrafilter op ω dat geen complementen van eindige verzamelingen bevat.

(c) Zij $\mathcal{F}_6 = \{A \subseteq \omega : 6 \in A\}$. De ultramacht $\mathcal{N}^\omega/\mathcal{F}_6$ bevat oneindig grote getallen.

(d) Geen bewering in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.

(1) 7. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:

(a) Een theorie is volledig dan en slechts dan als de theorie consistent is.

(b) Als een theorie een model heeft dat is de theorie volledig.

(c) Elke consistente theorie heeft een model.

(d) Er is geen verschil tussen de begrippen 'een interpretatie van een theorie' en 'een model van een theorie'.

(1) 8. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:

(a) De theorie K_2 van dicht geordende verzamelingen zonder het kleinste of het grootste element is niet $\aleph_0$-cathegorisch.

(b) Elk model van de theorie van de reële rechte is isomorf met $\mathcal{R}$, waarbij $\mathcal{R}$ het standaard model van de reële rechte is.

(c) Elk functiesymbool definieert een predicaatsymbool.

(d) Elke bewering in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.

(1) 9. Zij $\mathcal{R}^*$ een niet-standaard model van $\mathcal{R}$, waarbij $\mathcal{R}$ het standaard model van de reële rechte is. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:

(a) $\mathcal{R}^*$ is uniek.

(b) Als $x, y \in \mathbb{R}^*$ en $x \approx y$ dan geldt $st(x) = st(y)$.

(c) Als $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ begrensd is dan $f^* : [0, 1] \to \mathbb{R}^*$ en het bereik van f^* bevat geen oneindig grote getallen.

(d) Geen bewering in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.

Open vragen

Het antwoord op elke open vraag moet beargumenteerd worden.

(3) 10. Formuleer en bewijs de Deductiestelling voor propositielogica.

(2) 11. Vertaal de volgende zinnen in wfs van de predicatenlogica. Beschrijf in ieder geval de taal die wordt gebruikt en de interpretatie van symbolen in die taal.

(i) Een voldoende voorwaarde dat een reële functie van één variabele begrensd is is dat zijn domein een gesloten en begrensd interval is.

(ii) Een noodzakelijke voorwaarde dat een reële functie van één variabele differentieerbaar is is dat hij continu is.

(2) 12. Bewijs of weerleg:

$$(\forall x)(\exists y)A_1^2(x, y) \Rightarrow (\exists y)A_1^2(y, y).$$

(3) 13. Neem aan dat y niet vrij in $\mathcal{D}$ is en dat $\mathcal{C}(x)$ en $\mathcal{C}(y)$ similar zijn. Bewijs

$$\vdash ((\forall x)\mathcal{C}(x) \Rightarrow \mathcal{D}) \Leftrightarrow (\exists y)(\mathcal{C}(y) \Rightarrow \mathcal{D})$$

14. Zij $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ een continue functie.

(4) a. Bewijs dat de standaard en niet-standaard definitie van de continuïteit van f equivalent zijn.

(4) b. Geef een niet-standaardbewijs dat f een maximum en een minimum op $[0, 1]$ heeft.

EINDE