
Het tentamen bestaat uit twee delen: 9 meerkeuzevragen en 5 open vragen.

Meerkeuzevragen

Elke meerkeuzevraag heeft precies één juist antwoord; het antwoord geven volstaat.

- (1) 1. Laat A en B propositieletters zijn. Bepaal welke van de volgende beweringen waar zijn.
- (a) $A \wedge B$ is in conjunctieve normaalvorm maar niet in disjunctieve normaalvorm.
 - (b) $A \wedge B$ is in disjunctieve normaalvorm maar niet in conjunctieve normaalvorm.
 - (c) $A \wedge B$ is in disjunctieve normaalvorm en ook in conjunctieve normaalvorm.
 - (d) Geen antwoord in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.
- (1) 2. Laat A en B propositieletters zijn. Neem aan dat C een propositievorm is met dezelfde waarheidswaarden als $A \vee B$ en zodanig dat C het connectief $\vee$ niet bevat.
- (a) C moet ook het connectief $\neg$ bevatten.
 - (b) Het is mogelijk C met alléén het connectief $\Rightarrow$ te maken.
 - (c) Het is mogelijk C met alléén het connectief $\Leftrightarrow$ te maken.
 - (d) Zo'n propositievorm C bestaat niet.
- (1) 3. Bepaal welke van de volgende beweringen is waar over de propositielogica L :
- (a) Volgens de Onvolledigheidsstelling van Gödel is het niet mogelijk om te bewijzen dat L consistent is.
 - (b) Elke propositievorm is een logisch gevolg van een contradictie.
 - (c) Elke propositievorm is een logisch gevolg van een tautologie.
 - (d) Geen antwoord in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.
- (1) 4. Beschouw de volgende wf $\mathcal{B}$ van de predicaatlogica: $(\forall x_3)A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_1)$. Bepaal welke van de volgende beweringen waar zijn.
- (a) De term $f_1^2(x_1, x_3)$ is vrij voor x_1 in $\mathcal{B}$.
 - (b) De term $f_1^2(x_1, x_3)$ is vrij voor x_1 in $\neg\mathcal{B}$.
 - (c) De term x_3 is vrij voor x_1 in $\mathcal{B}$.
 - (d) Geen antwoord in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (1) 5. Zij $\mathcal{B}$ een wf van een eerste-orde theorie T die vrije variabelen bevat. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:
- (a) Er is altijd een model M van T waarin $\mathcal{B}$ niet waar is.
 - (b) Voor elk model M van T geldt dat de waarheid van $\mathcal{B}$ in M niet bepaald kan worden.
 - (c) Het kan gebeuren dat $\mathcal{B}$ waar is in elk model M van T .
 - (d) Een prenex-normaalvorm van $\mathcal{B}$ hoeft niet logisch equivalent met $\mathcal{B}$ te zijn.
- (1) 6. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:
- (a) Elke eerste-orde theorie heeft een aftelbaar model.
 - (b) Als een eerste-orde theorie willekeurig grote eindige modellen heeft dan heeft de theorie een oneindig model.
 - (c) Volgens de Onvolledigheidsstelling van Gödel is geen eerste-orde theorie volledig.
 - (d) Alle beweringen in onderdelen (a), (b) en (c) zijn niet waar.
- (1) 7. Zij T een eerste-orde theorie. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:
- (a) T moet eindig veel axioma's bevatten.
 - (b) Elke twee elementair equivalente modellen van T zijn isomorf.
 - (c) Elke twee isomorfe modellen van T zijn elementair equivalent.
 - (d) Elke eerste-orde theorie is $\aleph_0$ -categorisch.
- (1) 8. Zij $\mathcal{L}$ de taal van een eerste-orde theorie. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:
- (a) $\mathcal{L}$ moet ten minste één predicaatletter bevatten.
 - (b) $\mathcal{L}$ moet ten minste één individuele constante bevatten.
 - (c) $\mathcal{L}$ mag alléén eindig veel individuele constanten bevatten.
 - (d) $\mathcal{L}$ moet het symbool voor de gelijkheid bevatten.
- (1) 9. Zij $\mathcal{R}^*$ een niet-standaardmodel van $\mathcal{R}$, waarbij $\mathcal{R}$ het standaardmodel van de reële rechte is. Bepaal welke van de volgende beweringen waar is:
- (a) Het domein $\mathbb{R}^*$ van $\mathcal{R}^*$ kan aftelbaar zijn.
 - (b) Als $x, y \in \mathbb{R}^*$, x eindig en y oneindig groot zijn dan kunnen we niets over $x \cdot y$ zeggen.
 - (c) $(0, 1)^* \cap (0, 1) = (0, 1)$.
 - (d) Voor elke $x \in \mathbb{R}^*$ bestaat $st(x)$.

Zie ook de volgende bladzijde.

Open vragen

Het antwoord op elke open vraag moet *volledig* beargumenteerd worden.

10. In deze vraag beschouwen we de propositielogica.

- (1) a. Formuleer de Deductiestelling.
- (2) b. Bewijs

$$\mathcal{C}, \mathcal{D} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}.$$

(3) 11. Vertaal de volgende zinnen in wfs van de propositielogica. Geef alle benodigde details.

- a. Het product van twee willekeurige reële getallen is niet negatief.
- b. Het product van twee willekeurige complexe getallen kan een negatief reëel getal zijn.

(3) 12. Bewijs:

$$\mathcal{B}, (\forall x)\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash (\forall x)\mathcal{C}.$$

(2) 13. a. Onderzoek met behulp van een semantische boom of de volgende wf van een eerste-orde theorie logisch geldig is:

$$(\forall x)(\exists y)A_1^2(x, y) \Rightarrow (\exists y)A_1^2(y, y).$$

(1) b. Construeer een model waarin de wf niet waar is of leg uit waarom zo'n model niet bestaat.

14. Beschouw een niet-standaardmodel $\mathcal{R}^*$ van de theorie van de reële rechte.

- (2) a. Laat zien dat het domein $\mathbb{R}^*$ van $\mathcal{R}^*$ oneindig grote getallen bevat.
- (1) b. Geef een niet-standaard definitie van $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, waarbij $\langle a_n \rangle_n$ een convergente rij reële getallen is (d.w.z., $a_n \in \mathbb{R}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$).
- (2) c. Geef een niet-standaard bewijs van

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2.$$

Geef alle details.

(1) d. Bestaat een $a \in \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n-1} = a?$$

Geef een uitleg met behulp van niet-standaard analyse.

Zie ook de volgende bladzijde.

Axioma's voor de propositielogica L :

Als B , C en D wfs zijn dan zijn de volgende wfs axioma's van L :

$$(A1) (B \Rightarrow (C \Rightarrow B))$$

$$(A2) ((B \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D)))$$

$$(A3) (((\neg C) \Rightarrow (\neg B)) \Rightarrow (((\neg C) \Rightarrow B) \Rightarrow C))$$

De enige afleidingsregel (rule of inference) is modus ponens:

Uit B en $(B \Rightarrow C)$ volgt C .

Axioma's voor de predicaatlogica K :

Als B , C en D wfs in $\mathcal{L}$ zijn dan zijn de volgende wfs logische axioma's van K :

$$(A1) B \Rightarrow (C \Rightarrow B)$$

$$(A2) ((B \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D)))$$

$$(A3) (\neg C \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg C \Rightarrow B) \Rightarrow C)$$

$$(A4) (\forall x_i)B(x_i) \Rightarrow B(t) \text{ als } B(x_i) \text{ een wf van } \mathcal{L} \text{ is en } t \text{ een term van } \mathcal{L} \text{ die vrij voor } x_i \text{ in } B(x_i) \text{ is}$$

$$(A5) (\forall x_i)(B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow (\forall x_i)C) \text{ als } B \text{ geen vrije voorkomens van } x_i \text{ bevat}$$

Proper axioma's zijn afhankelijk van de eerste-orde theorie.

De volgende wfs zijn axioma's van eerste-orde theorie met gelijkheid:

$$(A6) (\forall x_1)x_1 = x_1$$

$$(A7) x = y \Rightarrow (B(x, x) \Rightarrow B(x, y))$$

Afleidingsregels (Rules of Inference) van elke eerste-orde theorie zijn:

Modus ponens: C volgt uit B en $B \Rightarrow C$

Generalizatie: $(\forall x_i)B$ volgt uit B

De punten voor elke opgave staan in de kantlijn. Eindcijfers worden berekend volgens de formule

$$\text{Eindcijfer} = \max \left\{ 60\% \frac{(\sum \text{punten}) + 3}{30} + 40\% \text{huiswerkcijfer} \right\}$$

indien het tentamencijfer tenminste 4,5 is; anders

eindcijfer=tentamencijfer.

Het eindcijfer wordt afgerond op halve cijfers.

EINDE