

# Tentamen Fourieranalyse, WI3601

29 augustus 2012, 09.00 - 12.00 uur

- Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven.
- Normering: totaal 100 punten ( $4 \times 25$ ). De normering per onderdeel staat tussen haakjes aangegeven.

1. Zij  $V$  een (reële of complexe) vectorruimte voorzien van een norm  $\|\cdot\|$ .

- (a) (3) Wanneer heet een deelverzameling  $K \subseteq V$  compact? (Geef de definitie).
- (b) (9) Laat zien: iedere compacte deelverzameling  $K$  van  $V$  is gesloten.
- (c) (4) Zij  $A \subseteq V$ . Wanneer heet  $f_0 \in V$  een ophopingspunt ("accumulation point") van  $A$ ? (Geef de definitie)
- (d) (9) Laat zien: als  $K \subseteq V$  compact is en  $A$  is een oneindige deelverzameling van  $K$ , dan heeft  $A$  tenminste een ophopingspunt in  $K$ .

2. We bekijken het interval  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  met Lebesgue maat  $\mu$ .

- (a) (10) Laat zien: als  $1 \leq p \leq \infty$ , dan geldt  $L_p([0, 1]) \subseteq L_1([0, 1])$  en  $\|f\|_1 \leq \|f\|_p$  voor alle  $f \in L_p([0, 1])$ .
- (b) (15) Zij  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  een meetbare functie die voor iedere  $0 < a < 1$  integreerbaar is over  $[a, 1]$ . Verder is gegeven dat  $\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 f(x) dx = A < \infty$  bestaat. Bewijs dat  $f$  integreerbaar is over  $[0, 1]$  met  $\int_0^1 f(x) dx = A$ .  
(Aanwijzing: bekijk de functies  $f_n = f \chi_{[1/n, 1]}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .)

3. Zij  $L_1(\mathbb{T}, \mu)$  de vectorruimte van alle (equivalentie klassen van)  $2\pi$ -periodieke meetbare functies  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  waarvoor  $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$  ( $\mu$  is Lebesgue maat). Voor  $f \in L_1(\mathbb{T}, \mu)$  worden de Fourier coëfficiënten gedefinieerd door

$$\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}.$$

- (a) (3) Laat zien dat  $|\widehat{f}(n)| \leq (2\pi)^{-1} \|f\|_1$  voor alle  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (b) (10) Neem  $0 \leq a < b \leq 2\pi$  en zij  $g = \chi_{(a,b]}$ . Laat zien dat  $\widehat{g}(n) \rightarrow 0$  als  $|n| \rightarrow \infty$ .
- (c) (12) Bewijs nu het Riemann-Lebesgue Lemma: voor iedere  $f \in L_1(\mathbb{T}, \mu)$  geldt dat  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  als  $|n| \rightarrow \infty$ .
4. We bekijken  $\mathbb{R}$  met Lebesgue maat  $\mu$ . Voor  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$  definiëren we de convolutie

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy,$$

voor die waarden van  $x \in \mathbb{R}$  waarvoor deze integraal bestaat (dwz. waarvoor de functie  $y \mapsto f(y) g(x - y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , integreerbaar is). Bewijs de volgende twee uitspraken:

- (a) (10) Als  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , dan bestaat  $(f * g)(x)$  voor  $\mu$ -bijna alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) (5) Als  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , dan  $f * g \in L_1(\mathbb{R})$  en  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

Voor  $f \in L_1(\mathbb{R})$  definiëren we de Fourier getransformeerde  $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  door

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (c). (10) Laat zien: als  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , dan geldt dat  $(f * g)^{\wedge}(x) = \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .