

Tentamen Fourieranalyse, WI3601, Uitwerking

29 augustus 2012, 09.00 - 12.00 uur

1. Zij V een (reële of complexe) vectorruimte voorzien van een norm $\|\cdot\|$.

- (a) (3) Wanneer heet een deelverzameling $K \subseteq V$ compact? (Geef de definitie).

Uitwerking: K heet compact als iedere overdekking van K met open deelverzamelingen van V een eindige deelloverdekking heeft.

- (b) (9) Laat zien: iedere compacte deelverzameling K van V is gesloten.

Uitwerking: We laten zien dat het complement $V \setminus K$ open is. Voor $f \in V$ en $r > 0$ noteren we de open bol met middelpunt f en straal r met $B(f, r)$, dwz. $B(f, r) = \{g \in V : \|f - g\| < r\}$. Neem $f_0 \in V \setminus K$. Voor iedere $g \in K$ is er een $r_g > 0$ zo dat $B(f_0, r_g) \cap B(g, r_g) = \emptyset$ (neem bijvoorbeeld $r_g = \frac{1}{4} \|f_0 - g\|$). Nu is $\{B(g, r_g) : g \in K\}$ een open overdekking van K en dus bestaan er eindig veel $g_1, \dots, g_n \in K$ zo dat $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(g_j, r_{g_j})$. Zij nu $r = \min_{1 \leq j \leq n} r_{g_j} > 0$. Dan is $B(f_0, r)$ disjunct met iedere $B(g_j, r_{g_j})$, $1 \leq j \leq n$, en dus ook met $\bigcup_{j=1}^n B(g_j, r_{g_j})$. Derhalve zijn $B(f_0, r)$ en K disjunct, dwz. $B(f_0, r) \subseteq V \setminus K$. We zijn klaar.

- (c) (4) Zij $A \subseteq V$. Wanneer heet $f_0 \in V$ een ophopingspunt (accumulation point) van A ? (Geef de definitie)

Uitwerking: f_0 is ophopingspunt van A als iedere open bol $B(f_0, r)$, $r > 0$, oneindig veel punten van A bevat.

- (d) (9) Laat zien: als $K \subseteq V$ compact is en A is een oneindige deelverzameling van K , dan heeft A tenminste een ophopingspunt in K .

Uitwerking: Stel niet. Dan bestaat er voor iedere $f \in K$ een $r_f > 0$ zodat $B(f, r_f)$ slechts eindig veel punten van A bevat. Nu is $\{B(f, r_f) : f \in K\}$ een open overdekking van K en dus zijn er eindig veel $f_1, \dots, f_n \in K$ zo dat $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(f_j, r_{f_j})$. Derhalve, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(f_j, r_{f_j})$. Omdat iedere $B(f_j, r_{f_j})$ eindig veel punten van A bevat en A een oneindige verzameling is, is dit een tegenspraak.

2. We bekijken het interval $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ met Lebesgue maat μ .

- (a) (10) Laat zien: als $1 \leq p \leq \infty$, dan geldt $L_p([0, 1]) \subseteq L_1([0, 1])$ en $\|f\|_1 \leq \|f\|_p$ voor alle $f \in L_p([0, 1])$.

Uitwerking: Neem $q \in [1, \infty]$ zo dat $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (met de "gebruikelijke afspraak"). Als $f \in L_p([0, 1])$, dan volgt uit de ongelijkheid van Hölder dat

$$\int_0^1 |f| d\mu = \int_0^1 |f| \mathbf{1} d\mu \leq \|f\|_p \|\mathbf{1}\|_q = \|f\|_p,$$

omdat $\|\mathbf{1}\|_q = 1$. Dus $f \in L_1([0, 1])$ met $\|f\|_1 \leq \|f\|_p$.

- (b) (15) Zij $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ een meetbare functie die voor iedere $0 < a < 1$ integreerbaar is over $[a, 1]$. Verder is gegeven dat $\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 f(x) dx = A$ bestaat met $A \in [0, \infty)$. Bewijs dat f integreerbaar is over $[0, 1]$ met $\int_0^1 f(x) dx = A$.

(Aanwijzing: bekijk de functies $f_n = f\chi_{[1/n, 1]}$, $n \in \mathbb{N}$.)

Uitwerking: Definieren we $f_n = f\chi_{[1/n, 1]}$, $n \in \mathbb{N}$, dan geldt dat $0 \leq f_n(x) \uparrow_n f(x)$ voor alle $x \in (0, 1]$ en dus $0 \leq f_n \uparrow f$ μ -bijna overal. Uit de monotone convergentie stelling volgt nu dat $\int_0^1 f_n(x) dx \uparrow \int_0^1 f(x) dx$. Anderzijds volgt uit het gegeven dat $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_{1/n}^1 f(x) dx \uparrow A$. Derhalve is dus $\int_0^1 f(x) dx = A < \infty$. Klaar.

3. Zij $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ de vectorruimte van alle (equivalentie klassen van) 2π -periodieke meetbare functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$ (μ is Lebesgue maat). Voor $f \in L_1(\mathbb{T}, \mu)$ worden de Fourier coëfficiënten gedefinieerd door

$$\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}.$$

- (a) (3) Laat zien dat $\left| \widehat{f}(n) \right| \leq (2\pi)^{-1} \|f\|_1$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Uitwerking: Voor $f \in L_1(\mathbb{T}, \mu)$ and $n \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(n) \right| &= (2\pi)^{-1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) e^{-inx}| dx \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = (2\pi)^{-1} \|f\|_1. \end{aligned}$$

- (b) (10) Neem $0 \leq a < b \leq 2\pi$ en zij $g = \chi_{(a,b]}$. Laat zien dat $\widehat{g}(n) \rightarrow 0$ als $|n| \rightarrow \infty$.

Uitwerking: Voor $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ geldt:

$$\widehat{g}(n) = (2\pi)^{-1} \int_a^b e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi in} (e^{-ina} - e^{-inb})$$

en dus

$$|\widehat{g}(n)| = \frac{1}{2\pi |n|} |e^{-ina} - e^{-inb}| \leq \frac{1}{\pi |n|},$$

waaruit volgt dat $\widehat{g}(n) \rightarrow 0$ als $|n| \rightarrow \infty$.

- (c) (12) Bewijs nu het Riemann-Lebesgue Lemma: voor iedere $f \in L_1(\mathbb{T})$ geldt dat $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ als $|n| \rightarrow \infty$.

Uitwerking: Als t een stapfunctie op cellen is, dwz. $t(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{(a_j, b_j]}$, met $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq a_j < b_j \leq 2\pi$ en $k \in \mathbb{N}$, dan is $\widehat{t}(n) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \widehat{\chi}_{(a_j, b_j]}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, en dus volgt uit (b) dat $\widehat{t}(n) \rightarrow 0$ als $|n| \rightarrow \infty$.

Zij nu $f \in L_1(\mathbb{T})$ en $\varepsilon > 0$ gegeven. Omdat de stapfuncties op cellen dicht liggen in $L_1(\mathbb{T})$ (stelling uit het boek) bestaat er zo'n stapfunctie t zo dat $\|f - t\|_1 \leq \varepsilon$. Uit (a) volgt dan dat

$$\left| \widehat{f}(n) - \widehat{t}(n) \right| = |(f - t)^\wedge(n)| \leq (2\pi)^{-1} \|f - t\|_1 \leq (2\pi)^{-1} \varepsilon$$

voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Derhalve is

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(n) \right| &\leq \left| \widehat{t}(n) \right| + \left| \widehat{f}(n) - \widehat{t}(n) \right| \\ &\leq \left| \widehat{t}(n) \right| + (2\pi)^{-1} \varepsilon \end{aligned}$$

voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Uit bovenstaande volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ is zo dat $|\widehat{t}(n)| \leq \varepsilon/2$ voor alle $|n| \geq N$. Dus is $\left| \widehat{f}(n) \right| \leq \varepsilon/2 + (2\pi)^{-1} \varepsilon \leq \varepsilon$ voor alle $|n| \geq N$. Klaar.

4. We bekijken $\mathbb{R}$ met Lebesgue maat μ . Voor $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ definiëren we de convolutie

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy,$$

voor die waarden van $x \in \mathbb{R}$ waarvoor deze integraal bestaat (dwz. waarvoor de functie $y \mapsto f(y) g(x - y)$, $y \in \mathbb{R}$, integreerbaar is). Bewijs de volgende twee uitspraken:

- (a) (10) Als $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, dan bestaat $(f * g)(x)$ voor μ -bijna alle $x \in \mathbb{R}$.

Uitwerking: Definieer de functie $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ door

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x - y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Deze functie is meetbaar (Fubini) en (weer Fubini, voor positieve functies)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x - y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x - y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \right) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $h(x) < \infty$ μ -b.o. Met andere woorden,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x - y)| dy < \infty$$

voor bijna alle $x \in \mathbb{R}$. Derhalve bestaat $(f * g)(x)$ voor μ -bijna alle $x \in \mathbb{R}$.

- (b) (5) Als $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, dan $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ en $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Uitwerking: Omdat

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x - y)| dy \end{aligned}$$

voor μ -bijna alle $x \in \mathbb{R}$, volgt uit de afschattingen in (a) dat

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \end{aligned}$$

en dus $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ met $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Voor $f \in L_1(\mathbb{R})$ definiëren we de Fourier getransformeerde $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c). (10) Laat zien: als $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, dan geldt dat $(f * g)^\wedge(x) = \hat{f}(x) \hat{g}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Uitwerking: Voor $x \in \mathbb{R}$ vinden we via Fubini:

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(y) e^{-ixy} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) g(y-z) dz \right) e^{-ixy} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y-z) e^{-ixy} dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-ix(u+z)} du \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-ixz} \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-ixu} du \right) dz \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-ixz} dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-ixu} du \right) \\ &= \hat{f}(x) \hat{g}(x). \end{aligned}$$

Dat het gebruik van Fubini hier gerechtvaardigd is volgt uit de afschattingen uit (b). We zijn klaar!