

Tentamen Fourieranalyse, WI3601

26 juni 2012, 09.00 - 12.00 uur

- Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven.
- Normering: totaal 100 punten (4×25). De normering per onderdeel staat tussen haakjes aangegeven.

1. Zij Δ een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$).
 - (a) (3) Geef de definitie van een open overdekking van Δ .
 - (b) (3) Wanneer heet Δ compact? (Geef de definitie)
 - (c) (4) Wanneer heet een functie $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ uniform continu op Δ ?
 - (d) (15) Neem nu aan dat Δ compact is. Bewijs dat iedere continue functie $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ uniform continu is op Δ .
2. Zij $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ de vectorruimte van alle (equivalentie klassen van) 2π -periodieke meetbare functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$ (μ is Lebesgue maat).
 - (a) (5) Wanneer wordt een rij $(e_n : n = 1, 2, \dots)$ in $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ een benaderende eenheid ("approximate identity") genoemd? (Geef de definitie).

Neem nu aan dat $(e_n : n = 1, 2, \dots)$ in $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ een benaderende eenheid is.

- (b) (10) Laat zien: als $f \in C(\mathbb{T})$, dan $\|f - e_n * f\|_{\infty} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.
- (c) (3) Laat zien: als $1 \leq p < \infty$ en $h \in C(\mathbb{T})$, dan $\|h\|_p \leq (2\pi)^{1/p} \|h\|_{\infty}$.

- (d) (7) Zij $1 \leq p < \infty$. Laat zien: als $f \in L_p(\mathbb{T}, \mu)$, dan $\|f - e_n * f\|_p \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Aanwijzing: gebruik (b), (c) en bedenk dat $C(\mathbb{T})$ dicht ligt in $L_p(\mathbb{T}, \mu)$.

3. Zij Λ de σ -algebra van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ (maw. $\Lambda = \mathcal{P}(\mathbb{N})$) en definieer de telmaat μ op Λ door $\mu(A) = \#A$ (dwz. het aantal elementen van A). Toon de volgende uitspraken aan.

- (a) (5) Iedere functie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ is μ -meetbaar.
 (b) (5) Als $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ en er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $f(n) = 0$ voor alle $n > N$, dan is f μ -integreerbaar en $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^N f(n)$.
 (c) (5) Als $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$, dan is $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.
 (d) (10) Zij $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Laat zien: f is μ -integreerbaar dan en slechts dan als $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ en in dat geval is $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

4. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodiek en continu differentieerbaar. De Fourier coëfficiënten van f worden gedefinieerd door

$$\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}.$$

- (a) (5) Laat zien dat $\widehat{f'}(n) = (in) \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
 (b) (10) Gebruik (a) om te bewijzen dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$.
 (c) (10) Laat nu zien dat $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.