

Tentamen Fourieranalyse, WI3601, Uitwerking

26 juni 2012, 09.00 - 12.00 uur

1. Zij Δ een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

(a) (3) Geef de definitie van een open overdekking van Δ .

Uitwerking. Een open overdekking van Δ is een collectie $\{O_\tau\}$ van open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^k$ zo dat $\Delta \subseteq \bigcup_\tau O_\tau$.

(b) (3) Wanneer heet Δ compact? (Geef de definitie)

Uitwerking. De verzameling Δ heet compact als iedere open overdekking van Δ een eindige deelovertrekking heeft.

(c) (4) Wanneer heet een functie $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ uniform continu op Δ ?

Uitwerking. Een functie $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ heet uniform continu op Δ als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ voor alle $x, y \in \Delta$ met $|x - y| < \delta$.

(d) (15) Neem nu aan dat Δ compact is. Bewijs dat iedere continue functie $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ uniform continu is op Δ .

Uitwerking. Voor $x \in \mathbb{R}^k$ en $r > 0$ noteren we $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^k : |x - y| < r\}$, de open bol met middelpunt x en straal r . Laat nu $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Als $x \in \Delta$, dan bestaat er een $\delta_x > 0$ zo dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ voor alle $y \in \Delta$ met $|x - y| < \delta_x$. Nu is $\{B(x, \delta_x/2) : x \in \Delta\}$ een open overdekking van Δ . Omdat Δ compact is bestaan er $x_1, \dots, x_n \in \Delta$ zo dat

$$\Delta \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \delta_{x_j}/2).$$

Definieer nu $\delta = \min(\delta_{x_1}/2, \dots, \delta_{x_n}/2) > 0$.

Stel nu dat $x, y \in \Delta$ zo dat $|x - y| < \delta$. Er is een $j \in \{1, \dots, n\}$ zo dat $x \in B(x_j, \delta_{x_j}/2)$. Omdat $|x - y| < \delta \leq \delta_{x_j}/2$, volgt dat $|x_j - y| \leq |x_j - x| + |x - y| < \delta_{x_j}$. Dus is $|x_j - x| < \delta_{x_j}$ en

$|x_j - y| < \delta_{x_j}$, en uit de keuze van δ_{x_j} volgt nu dat $|f(x_j) - f(x)| < \varepsilon/2$ en ook $|f(x_j) - f(y)| < \varepsilon/2$. Derhalve geldt dat

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dit laat zien dat f uniform continu is op Δ .

2. Zij $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ de vectorruimte van alle (equivalentie klassen van) 2π -periodieke meetbare functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$ (μ is Lebesgue maat).

(a) (5) Wanneer wordt een rij $(e_n : n = 1, 2, \dots)$ in $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ een benaderende eenheid ("approximate identity") genoemd? (Geef de definitie).

Uitwerking. De rij (e_n) in $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ heet een benaderende eenheid als:

- i. $e_n(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$;
- ii. $\int_{-\pi}^{\pi} e_n(x) dx = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;
- iii. voor iedere $0 < \delta < \pi$ geldt $\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} e_n(x) dx \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Neem nu aan dat $(e_n : n = 1, 2, \dots)$ in $L_1(\mathbb{T}, \mu)$ een benaderende eenheid is.

(b) (10) Laat zien: als $f \in C(\mathbb{T})$, dan $\|f - e_n * f\|_{\infty} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Uitwerking. We moeten laten zien: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$|f(x) - (e_n * f)(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq N.$$

Laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn. Omdat f continu is en 2π -periodiek, is f uniform continu en dus is er een $0 < \delta < \pi$ zo dat $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon/2$ voor alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ met $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Bovendien is f begreind, en dus is er een $0 < M \in \mathbb{R}$ zo dat $|f(x)| \leq M, x \in \mathbb{R}$.

Voor $x \in \mathbb{R}$ is nu (gebruik (i))

$$\begin{aligned} f(x) - (e_n * f)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(y) f(x) dy - \int_{-\pi}^{\pi} e_n(y) f(x-y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(y) \{f(x) - f(x-y)\} dy \end{aligned}$$

en dus (gebruik (ii))

$$\begin{aligned} |f(x) - (e_n * f)(x)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} e_n(y) |f(x) - f(x-y)| dy \\ &= \int_{|y| \leq \delta} \dots + \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \dots \end{aligned}$$

Als $|y| \leq \delta$, dan volgt uit de keuze van δ dat $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon/2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus is

$$\int_{|y| \leq \delta} \dots \leq \int_{|y| \leq \delta} e_n(y) \varepsilon dy \leq (\varepsilon/2) \int_{-\pi}^{\pi} e_n(y) dy = \varepsilon/2$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$. Verder is $|f(x) - f(x-y)| \leq 2M$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ en dus

$$\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \dots \leq 2M \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} e_n(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Omdat $\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} e_n(y) dy \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $2M \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} e_n(y) dy \leq \varepsilon/2$ voor alle $n \geq N$. Derhalve is $\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \dots \leq \varepsilon/2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ and alle $n \geq N$. We concluderen dat $|f(x) - (e_n * f)(x)| \leq \varepsilon$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle $n \geq N$.

- (c) (3) Laat zien: als $1 \leq p < \infty$ en $h \in C(\mathbb{T})$, dan $\|h\|_p \leq (2\pi)^{1/p} \|h\|_{\infty}$.

Uitwerking. Omdat $|h(x)| \leq \|h\|_{\infty}$ voor alle $x \in [-\pi, \pi]$, volgt dat

$$\begin{aligned} \|h\|_p &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \|h\|_{\infty}^p dx \right)^{1/p} = (2\pi)^{1/p} \|h\|_{\infty}. \end{aligned}$$

- (d) (7) Zij $1 \leq p < \infty$. Laat zien: als $f \in L_p(\mathbb{T}, \mu)$, dan $\|f - e_n * f\|_p \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Aanwijzing: gebruik (b), (c) en bedenk dat $C(\mathbb{T})$ dicht ligt in $L_p(\mathbb{T}, \mu)$.

Uitwerking. Gegeven $f \in L_p(\mathbb{T}, \mu)$ en $\varepsilon > 0$ bestaat er een $g \in C(\mathbb{T})$ zo dat $\|f - g\|_p \leq \varepsilon/3$. Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt nu

$$\begin{aligned} \|f - f * e_n\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - e_n * g\|_p \\ &\quad + \|e_n * (g - f)\|_p \\ &\leq \varepsilon/3 + \|g - e_n * g\|_p + \|e_n\|_1 \|g - f\|_p \\ &\leq 2(\varepsilon/3) + \|g - e_n * g\|_p. \end{aligned}$$

Uit (c) volgt dat $\|g - e_n * g\|_p \leq (2\pi)^{1/p} \|g - e_n * g\|_\infty$. Uit (b) weten we dat $\|g - e_n * g\|_\infty \rightarrow 0$ en dus $\|g - e_n * g\|_p \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Derhalve is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\|g - e_n * g\|_p \leq \varepsilon/3$ voor alle $n \geq N$. We concluderen dat $\|f - f * e_n\|_p \leq \varepsilon$ voor alle $n \geq N$ en we zijn klaar.

3. Zij Λ de σ -algebra van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ (maw. $\Lambda = \mathcal{P}(\mathbb{N})$) en definieer de telmaat μ op Λ door $\mu(A) = \#A$ (dwz. het aantal elementen van A). Toon de volgende uitspaken aan.

- (a) (5) Iedere functie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ is μ -meetbaar.

Uitwerking. Voor iedere $a \in \mathbb{R}$ geldt dat $\{n \in \mathbb{N} : f(n) > a\} \in \Lambda$ en dus is f meetbaar.

- (b) (5) Als $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ en er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $f(n) = 0$ voor alle $n > N$, dan is f μ -integreerbaar en $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^N f(n)$.

Uitwerking. Schrijf f als $f = \sum_{n=1}^N f(n) \chi_{\{n\}}$. Omdat $\mu(\{n\}) = 1$ ($< \infty$) voor alle n , is f een integreerbare stapfunctie met

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^N f(n) \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^N f(n).$$

- (c) (5) Als $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$, dan is $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Uitwerking. Voor $N \in \mathbb{N}$ definiëren we $f_N = f \chi_{[1, N]}$. Voor iedere N volgt uit (b) dat

$$\int_{\mathbb{N}} f_N d\mu = \sum_{n=1}^N f(n).$$

Omdat iedere f_N een integreerbare stapfunctie is en $f_N(n) \uparrow_N f(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (maw. $0 \leq f_N \uparrow_N f$) volgt uit de definitie van de integraal dat

$$\int_{\mathbb{N}} f_N d\mu \uparrow_N \int_{\mathbb{N}} f d\mu$$

en dus is $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

- (d) (10) Zij $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Laat zien: f is μ -integreerbaar dan en slechts dan als $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ en in dat geval is $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Uitwerking. De functie f is integreerbaar dan en slechts dan als $|f|$ integreerbaar is, maw. (zie (c)), dan en slechts dan als $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$.

Als f integreerbaar is, dan is (per definitie)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f d\mu &= \int_{\mathbb{N}} f^+ d\mu - \int_{\mathbb{N}} f^- d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f^+(n) - \sum_{n=1}^{\infty} f^-(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),\end{aligned}$$

omdat beide reeksen convergent zijn en $f(n) = f^+(n) - f^-(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodiek en continu differentieerbaar. De Fourier coëfficiënten van f worden gedefinieerd door

$$\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}.$$

- (a) (5) Laat zien dat $\widehat{f}'(n) = (in) \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Uitwerking. Met behulp van partiele integratie vinden we dat

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} df(x) \\ &= f(x) e^{-inx} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) de^{-inx} \\ &= (in) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,\end{aligned}$$

en hieruit volgt dat $\widehat{f}'(n) = (in) \widehat{f}(n)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

- (b) (10) Gebruik (a) om te bewijzen dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

Uitwerking. Omdat $f' \in C(\mathbb{T})$ en $C(\mathbb{T}) \subseteq L_2(\mathbb{T})$, volgt uit de ongelijkheid van Bessel dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}'(n)|^2 < \infty$. Nu volgt mbv (a) en de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz dat

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N |\widehat{f}(n)| &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} |\widehat{f}'(n)| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2}\end{aligned}$$

voor alle $N \in \mathbb{N}$. Derhalve is

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Op dezelfde manier volgt dat ook $\sum_{n=-1}^{-\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ en dus is $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$.

(c) (10) Laat nu zien dat $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Uitwerking. Omdat $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ volgt uit de Weierstrass M-test dat de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ uniform (en absoluut) convergeert op $\mathbb{R}$. De somfunctie $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ is dus continu en 2π -periodiek. Voor $m \in \mathbb{Z}$ is nu

$$\begin{aligned} \hat{g}(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \right) e^{-imx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \hat{f}(m), \end{aligned}$$

waar we gebruikt hebben dat de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ uniform convergeert op $[-\pi, \pi]$, en de orthogonaliteits relaties

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

De continue functies f en g hebben dus dezelfde Fourier coëfficiënten en derhalve $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. We zijn klaar!