

Tentamen Fourieranalyse, WI3601

30 juni 2010, 09.00 - 12.00 uur

- Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Dit tentamen bestaat uit drie opgaven.
 - Normering: totaal 100 punten ($10+3\times 30$). De normering per onderdeel staat tussen haakjes aangegeven.
1. Zij $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ een rij continue functies, $K_N : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Hierbij is $\mathbb{T}$ de eenheidscirkel, geïdentificeerd met, bijvoorbeeld, het interval $[-\pi, \pi]$.
 - (a) (5) Wanneer wordt de rij $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ een "familie van goede kernen" (voor $N \rightarrow \infty$) genoemd? (Geef de definitie).
 - (b) (10) Laat zien: als $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ een familie van goede kernen is en als $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie is, dan $K_N * f \rightarrow f$ uniform als $N \rightarrow \infty$.

De Fejér kernen op $\mathbb{T}$ worden gedefinieerd door

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(\theta), \quad N \in \mathbb{N},$$

waarbij $D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Zoals bekend,

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(N\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \theta \neq 0, \quad F_N(0) = N.$$

- (c) (10) Laat zien dat $\{F_N\}_{N=1}^\infty$ een familie van goed kernen op $\mathbb{T}$ is.
- (d) (5) Laat zien: als $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ continu is dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een trigonometrisch polynoom $t(\theta)$ zo dat $|f(\theta) - t(\theta)| \leq \varepsilon$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

2. We noteren met $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ de collectie van alle continue functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor een constante $A \geq 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$. Voor $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ is de Fourier getransformeerde $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$, $\xi \in \mathbb{R}$.

- (a) (10) Als $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, dan is $\hat{f}$ continu. Bewijs dit.
 (b) (10) Laat zien: als $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, dan is voor $\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 1/(2\xi)) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

- (c) (10) Als $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, dan $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ als $|\xi| \rightarrow \infty$.
 (Aanwijzing: gebruik (b) en dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-h)| dx \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$; dit laatste hoeft niet te worden aangetoond).

3. De functie $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$g_1(x) = 1 - |x|, \quad |x| \leq 1, \quad g_1(x) = 0, \quad |x| \geq 1.$$

- (a) (5) Toon aan dat

$$\hat{g}_1(\xi) = \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right)^2, \quad \xi \neq 0, \quad \hat{g}_1(0) = 1.$$

- (b) (10) Voor $R > 0$ definiëren we $F_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$F_R(x) = R \left(\frac{\sin \pi R x}{\pi R x} \right)^2, \quad x \neq 0, \quad F_R(0) = R.$$

Laat zien dat $\hat{F}_R = g_R$, waarbij $g_R(x) = g_1(x/R)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (c) (10) Toon aan dat $\{F_R\}_{R>0}$ een familie van goede kernen op $\mathbb{R}$ is voor $R \rightarrow \infty$.
 (d) (5) Laat zien dat voor $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ geldt dat

$$\int_{-R}^R \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|/R) e^{2\pi i x \xi} d\xi = (F_R * f)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

en concludeer hieruit dat $\int_{-R}^R \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|/R) e^{2\pi i x \xi} d\xi \rightarrow f(x)$ uniform op $\mathbb{R}$ als $R \rightarrow \infty$.