

Tentamen Fourier Analyse, WI3601

Uitwerking

21 juni 2011, 09.00 - 12.00 uur

1. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een 2π -periodieke continu differentieerbare functie.

(a) (10) Laat zien dat de Fourier coëfficiënten van de afgeleide f' gegeven worden door $\widehat{f'}(n) = (in) \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Uitwerking. Voor $n \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} df(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) de^{-in\theta} \\ &= (in) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = (in) \widehat{f}(n).\end{aligned}$$

(b) (10) Toon aan dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

Uitwerking. Uit (a) volgt dat $\widehat{f}(n) = (in)^{-1} \widehat{f'}(n)$ voor alle $n \neq 0$ en dus:

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\widehat{f}(n)| = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|n|} |\widehat{f'}(n)|.$$

Omdat

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|n|^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

en uit Parseval volgt dat

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\widehat{f'}(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 d\theta < \infty,$$

vinden we via de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz dat

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|n|^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\hat{f}'(n)| \right)^{1/2} < \infty.$$

Derhalve is ook $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$.

Zij $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ een absoluut sommeerbare rij complexe getallen, dwz. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$.

- (c) (10) Laat zien dat er een 2π -periodieke continue functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bestaat zo dat $\hat{g}(n) = a_n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Uitwerking. Definieer

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Omdat $|a_n e^{in\theta}| = |a_n|$, $\theta \in \mathbb{R}$, voor alle $n \in \mathbb{Z}$ en $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, volgt uit de Weierstrass M-test dat deze reeks absoluut en uniform convergeert op $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat g continu is (en duidelijk 2π -periodiek).

Nu is

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\theta} \right) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = a_n, \end{aligned}$$

omdat $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = 0$ als $m \neq n$ en $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = 1$ als $m = n$. Het verwisselen van integraal en oneindige sommatie is toegestaan vanwege de uniforme convergentie van de reeks.

2. We noteren met $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ de collectie van alle continue functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor een constante $A \geq 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$. Voor $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ is de Fourier getransformeerde $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$, $\xi \in \mathbb{R}$.

- (a) (5) Zij $\{K_\delta : \delta > 0\}$ een familie functies in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Wanneer wordt dit een "familie van goede kernen" genoemd voor $\delta \downarrow 0$?

Uitwerking. $\{K_\delta : \delta > 0\}$ heet een familie van goede kernen als:

- i. $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1$ voor alle $\delta > 0$;

- ii. er is een constante $C > 0$ zo dat $\int_{-\infty}^{\infty} |K_{\delta}(x)| dx \leq C$ voor alle $\delta > 0$;
 - iii. voor iedere $\eta > 0$ geldt dat $\int_{|x| \geq \eta} |K_{\delta}(x)| dx \rightarrow 0$ als $\delta \downarrow 0$.
- (b) (10) Gegeven de functie $h \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ die voldoet aan $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1$, definieer voor $\delta > 0$:

$$K_{\delta}(x) = \frac{1}{\delta} h\left(\frac{x}{\delta}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat $\{K_{\delta} : \delta > 0\}$ een familie van goede kernen is voor $\delta \downarrow 0$.

Uitwerking. We controleren de bovenstaande condities.

- i. $\int_{-\infty}^{\infty} K_{\delta}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1/\delta) h(x/\delta) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1$ voor alle $\delta > 0$.
- ii. $\int_{-\infty}^{\infty} |K_{\delta}(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1/\delta) |h(x/\delta)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx$. We kunnen dus $C = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx$ kiezen.
- iii. Gegeven $\eta > 0$ geldt er dat

$$\int_{|x| \geq \eta} |K_{\delta}(x)| dx = \int_{|x| \geq \eta} (1/\delta) |h(x/\delta)| dx = \int_{|y| \geq \eta/\delta} |h(y)| dy.$$

Omdat $\int_{-\infty}^{\infty} |h(y)| dy < \infty$ en $\eta/\delta \rightarrow \infty$ als $\delta \rightarrow 0$, volgt dat

$$\int_{|y| \geq \eta/\delta} |h(y)| dy \rightarrow 0 \text{ als } \delta \rightarrow 0.$$

- (c) (5) Voor $y > 0$ worden de Poisson kernen op $\mathbb{R}$ gegeven door

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Laat zien dat $\{P_y : y > 0\}$ een familie van goede kernen is voor $y \downarrow 0$.

Uitwerking. Merk op dat

$$P_y(x) = \frac{1}{y} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x/y)^2 + 1} = \frac{1}{y} P_1(x/y), \quad x \in \mathbb{R},$$

voor alle $y > 0$. Omdat $\int_{-\infty}^{\infty} P_1(x) dx = 1$ (immers $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(x^2 + 1) dx = \pi$), volgt het gevraagde nu direct uit (b).

- (d) (10) Laat zien dat de Fourier getransformeerde van P_y wordt gegeven door

$$\widehat{P}_y(\xi) = e^{-2\pi|\xi|y}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Uitwerking. Voor $y > 0$ berekenen we eerst de Fourier getransformeerde van de functie $g_y(\xi) = e^{-2\pi|\xi|y}$, $\xi \in \mathbb{R}$. We vinden:

$$\begin{aligned}\hat{g}_y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|y} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi y} e^{-2\pi i x \xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi y} e^{2\pi i x \xi} d\xi.\end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi y} e^{-2\pi i x \xi} d\xi &= \frac{-1}{2\pi(y+ix)} e^{-2\pi(y+ix)\xi} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{2\pi(y+ix)} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-2\pi(y+ix)R} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(y+ix)},\end{aligned}$$

omdat $|e^{-2\pi(y+ix)R}| = e^{-2\pi y R} \rightarrow 0$ als $R \rightarrow \infty$. Vervangen we x door $-x$, dan volgt ook dat

$$\int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi y} e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{1}{2\pi(y-ix)}.$$

Derhalve is

$$\begin{aligned}\hat{g}_y(x) &= \frac{1}{2\pi(y+ix)} + \frac{1}{2\pi(y-ix)} \\ &= \frac{(y-ix) + (y+ix)}{2\pi(y+ix)(y-ix)} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = P_y(x).\end{aligned}$$

Omdat de functies P_y en g_y beide tot $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ behoren, volgt nu uit de Fourier inversie formule dat

$$g_y(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) e^{2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Vervangen we nu ξ door $-\xi$,

$$g_y(\xi) = g_y(-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

maw. $\hat{P}_y = g_y$ voor alle $y > 0$.

3. Zij $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ en definieer

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- (a) (5) Bewijs dat deze reeks absoluut en uniform convergent is op $[-R, R]$ voor iedere $R > 0$. Laat zien dat $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een 1-periodieke continue functie is.

Uitwerking. Omdat $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ is er een constante $A > 0$ zo dat

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gegeven $R > 0$ kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $R < N$. Als $x \in [-R, R]$ en $n \in \mathbb{N}$ met $|n| \geq N$, dan is $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - R \geq N - R > 0$ en dus $(x+n)^2 \geq (|n| - R)^2$. Derhalve is

$$|f(x+n)| \leq \frac{A}{1+(x+n)^2} \leq \frac{A}{1+(|n|-R)^2}$$

voor alle $x \in [-R, R]$ en $|n| \geq N$. De reeks

$$\sum_{|n| \geq N} \frac{1}{1+(|n|-R)^2} = 2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{1+(n-R)^2}$$

is convergent (vergelijk met $\sum_{n=N}^{\infty} 1/n^2$) en dus volgt uit de Weierstrass M-test dat de reeks

$$\sum_{|n| \geq N} f(x+n)$$

absoluut en uniform convergent is op $[-R, R]$. Het zelfde geldt dan voor de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ (slechts eindig veel termen verschillend).

Uit de uniforme convergentie volgt dat F continu is (op ieder interval $[-R, R]$, $R > 0$, en dus op $\mathbb{R}$). Verder is

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+1+n) \stackrel{m=n+1}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus, F is 1-periodiek.

- (b) (10) Voor $m \in \mathbb{Z}$ noteren we $\widehat{F}(m) = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i m x} dx$, de m -de Fourier coefficient van F . Toon aan dat

$$\widehat{F}(m) = \hat{f}(m), \quad m \in \mathbb{Z},$$

waarbij $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de Fourier getransformeerde van f is.

Uitwerking. Omdat de reeks (1) uniform convergeert op $[0, 1]$ mogen we sommatie en integraal verwisselen en we vinden dat voor $m \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\begin{aligned}\hat{F}(m) &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi i m x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx.\end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx &\stackrel{y=x+n}{=} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m (y-n)} dy \\ &= \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy\end{aligned}$$

(want $e^{2\pi i m n} = 1$). Dus:

$$\begin{aligned}\hat{F}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i m y} dy = \hat{f}(m)\end{aligned}$$

- (c) (10) Neem nu bovendien aan dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$. Laat zien dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Uitwerking. Definieer de functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Omdat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ volgt uit de Weierstrass M-test dat bovenstaande reeks absoluut en uniform convergeert op $\mathbb{R}$. Derhalve is g een continue 1-periodieke functie met $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$ (zie het argument in Opgave 1 (c)). Omdat F en g beide continu zijn, volgt hieruit dat $F(x) = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- (d) (5) Toon aan dat voor $y > 0$ geldt dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi \cosh(\pi y)}{y \sinh(\pi y)}$$

(Aanwijzing: pas (c) toe op de functie P_y).

Uitwerking. Uit (2) met $f = P_y$ en $x = 0$ volgt dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{P}_y(n).$$

Nu is

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_y(n) = \frac{y}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2}$$

en

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{P}_y(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|n|y} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi ny} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi ny} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi y}} + \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \\ &= \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} = \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{\cosh(\pi y)}{\sinh(\pi y)}. \end{aligned}$$

Combinatie van het bovenstaande geeft nu dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi \cosh(\pi y)}{y \sinh(\pi y)}.$$