

Tentamen Fourier Analyse, WI3601

Uitwerking

30 juni 2010, 09.00 - 12.00 uur

1. Zij $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ een rij continue 2π -periodieke functies, $K_N : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$.
 - (a) Wanneer wordt de rij $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ een "familie van goede kernen" (voor $N \rightarrow \infty$) genoemd? (Geef de definitie).
Uitwerking. $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ heet een familie van goede kernen als:
 - i. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta) d\theta = 1$ voor alle N ;
 - ii. er is een constante $0 < M \in \mathbb{R}$ zo dat $\int_{-\pi}^{\pi} |K_N(\theta)| d\theta \leq M$ voor alle N ;
 - iii. voor iedere $0 < \delta < \pi$ geldt dat $\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |K_N(\theta)| d\theta \rightarrow 0$ als $N \rightarrow \infty$.
 - (b) Laat zien: als $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ een familie van goede kernen is en als $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie is, dan $K_N * f \rightarrow f$ uniform als $N \rightarrow \infty$.

Uitwerking. Voor $\theta \in [-\pi, \pi]$ geldt dat

$$\begin{aligned} f(\theta) - (K_N * f)(\theta) &= f(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) f(\theta - t) dt \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) (f(\theta) - f(\theta - t)) dt. \end{aligned}$$

De functie f is begreund en dus is er een constante $0 < C \in \mathbb{R}$ zo dat $|f(\theta)| \leq C$ voor alle $\theta \in [-\pi, \pi]$. Zij nu $\varepsilon > 0$ gegeven. Omdat f uniform continu is op $[-\pi, \pi]$ is er een $\delta > 0$ zo dat $|f(\theta) - f(\theta - t)| \leq \varepsilon$ voor alle $\theta, t \in [-\pi, \pi]$ met $|t| \leq \delta$. Nu volgt dat

$$\begin{aligned} |f(\theta) - (K_N * f)(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)| |f(\theta) - f(\theta - t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} \dots dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \dots dt \end{aligned}$$

en

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} \dots dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |K_N(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)| dt \stackrel{(ii)}{\leq} \frac{\varepsilon M}{2\pi},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \dots dt \leq \frac{2C}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_N(t)| dt.$$

Uit (iii) volgt dat er een $N_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_N(t)| dt \leq \varepsilon$ voor all $N \geq N_0$. Derhalve is

$$|f(\theta) - (K_N * f)(\theta)| \leq \varepsilon \left(\frac{M}{2\pi} + \frac{C}{\pi} \right), \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad N \geq N_0.$$

We zijn klaar.

De Fejér kernen op $\mathbb{T}$ worden gedefinieerd door

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(\theta), \quad N \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

waarbij $D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Zoals bekend,

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(N\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \theta \neq 0, \quad F_N(0) = N. \quad (2)$$

(c) Laat zien dat $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ een familie van goed kernen op $\mathbb{T}$ is.

Uitwerking. (i). Omdat $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) d\theta = 1$ voor alle n , volgt uit (1) dat $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta) d\theta = 1$ voor alle N . Eigenschap (ii) is nu ook duidelijk omdat $F_N(\theta) \geq 0$.

(iii). Hiervoor gebruiken we (2). Laat $0 < \delta < \pi$ gegeven zijn. Als $\delta \leq |\theta| \leq \pi$, dan is $|\sin(\theta/2)| \geq |\sin(\delta/2)|$ en dus

$$0 \leq F_N(\theta) \leq \frac{\sin^2(N\theta/2)}{N \sin^2(\delta/2)} \leq \frac{1}{N \sin^2(\delta/2)}, \quad \delta \leq |\theta| \leq \pi.$$

Dus is

$$0 \leq \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} F_N(\theta) d\theta \leq \frac{1}{N} \frac{2(\pi - \delta)}{\sin^2(\delta/2)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

en (iii) volgt.

- (d) Laat zien: als $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ continu is dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een trigonometrisch polynoom $t(\theta)$ zo dat $|f(\theta) - t(\theta)| \leq \varepsilon$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Uitwerking. Omdat $\{F_N\}_{N=1}^\infty$ een familie goede kernen is weten we dat $F_N * f \rightarrow f$ uniform op $[-\pi, \pi]$ als $N \rightarrow \infty$. Iedere F_N is een trigonometrisch polynoom en dus is $F_N * f$ ook een trigonometrisch polynoom. Nu is de bewering duidelijk.

2. We noteren met $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ de collectie van alle continue functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor een constante $A \geq 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$. Voor $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ is de Fourier getransformeerde $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$, $\xi \in \mathbb{R}$.

- (a) Als $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, dan is $\hat{f}$ continu. Bewijs dit.

Uitwerking. Voor $\xi, h \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi + h) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-2\pi i x \xi} - e^{-2\pi i x (\xi + h)}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} (1 - e^{-2\pi i x h}) dx \end{aligned}$$

en dus,

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi + h)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |1 - e^{-2\pi i x h}| dx.$$

Voor $R > 0$ schrijven we $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |1 - e^{-2\pi i x h}| dx = \int_{|x| \geq R} \dots dx + \int_{-R}^R \dots dx$. Kies nu $R > 0$ zo groot dat $\int_{|x| \geq R} |f(x)| dx \leq \varepsilon/4$ (dit kan omdat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$). Omdat $|1 - e^{-2\pi i x h}| \leq 2$, is

$$\int_{|x| \geq R} \dots dx \leq 2 \int_{|x| \geq R} |f(x)| dx \leq \varepsilon/2.$$

Bij deze vast gekozen R , neem $\delta > 0$ zo dat $2\pi R \delta \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq \varepsilon/2$. Gebruiken we dat $|1 - e^{-2\pi i x h}| \leq 2\pi |x| |h|$, dan vinden we voor $|h| \leq \delta$ dat

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \dots dx &\leq \int_{-R}^R |f(x)| (2\pi |x| |h|) dx \leq 2\pi R |h| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \\ &\leq 2\pi R \delta \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Conclusie: voor alle $|h| \leq \delta$ geldt dat

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi + h) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |1 - e^{-2\pi i x h}| dx \\ &= \int_{|x| \geq R} \dots dx + \int_{-R}^R \dots dx \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

We zijn klaar.

(b) Laat zien: als $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, dan is voor $\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 1/(2\xi)) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Uitwerking. Voor $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$, vinden we via de substitutie $y = x + \frac{1}{2\xi}$ dat

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i (y - \frac{1}{2\xi}) \xi} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i y \xi} e^{-\pi i} dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i y \xi} dy. \end{aligned}$$

(c) Als $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, dan $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ als $|\xi| \rightarrow \infty$.

(Aanwijzing: gebruik (b) en het feit dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-h)| dx \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$).

Uitwerking. Uit (b) volgt dat

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 1/(2\xi)) e^{-2\pi i x \xi} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) - f(x - 1/(2\xi))\} e^{-2\pi i x \xi} dx \end{aligned}$$

en dus

$$\left| \hat{f}(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x - 1/(2\xi))| dx.$$

We weten dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x - 1/(2\xi))| dx \rightarrow 0$ als $|\xi| \rightarrow \infty$ en dus $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ als $|\xi| \rightarrow \infty$.

3. De functie $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$g_1(x) = 1 - |x|, \quad |x| \leq 1, \quad g_1(x) = 0, \quad |x| \geq 1.$$

(a) Toon aan dat

$$\hat{g}_1(\xi) = \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right)^2, \quad \xi \neq 0, \quad \hat{g}_1(0) = 1.$$

Uitwerking. Voor $\xi \neq 0$ is

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(\xi) &= \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) (e^{2\pi i x \xi} + e^{-2\pi i x \xi}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(2\pi x \xi) dx = \frac{1}{\pi \xi} \int_0^1 (1 - x) d \sin(2\pi x \xi) \\ &= \frac{1}{\pi \xi} (1 - x) \sin(2\pi x \xi) \Big|_{x=0}^1 + \frac{1}{\pi \xi} \int_0^1 \sin(2\pi x \xi) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 \xi^2} \cos(2\pi x \xi) \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2\pi^2 \xi^2} (1 - \cos(2\pi \xi)) \\ &= \frac{\sin^2(\pi \xi)}{\pi^2 \xi^2}. \end{aligned}$$

Voor $\xi = 0$ is

$$\hat{g}_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) dx = 1.$$

(b) Voor $R > 0$ definiëren we $F_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$F_R(x) = R \left(\frac{\sin \pi R x}{\pi R x} \right)^2, \quad x \neq 0, \quad F_R(0) = R.$$

Laat zien dat $\hat{F}_R = g_R$, waarbij $g_R(x) = g_1(x/R)$, $x \in \mathbb{R}$.

Uitwerking. Voor $R > 0$ geldt dat

$$\hat{g}_R(\xi) = R \hat{g}_1(R\xi) = F_R(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Omdat g_R en $\hat{g}_R$ beide tot $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ behoren, volgt uit de Fourier inversie formule dat

$$g_R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vervangen we hier x door $-\xi$ (merk op: g_R is even) en ξ door x dan vinden we dat

$$g_R(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) e^{-2\pi i x \xi} d\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

met andere woorden, $\hat{F}_R = g_R$.

- (c) Toon aan dat $\{F_R\}_{R>0}$ een familie van goede kernen op $\mathbb{R}$ is voor $R \rightarrow \infty$.

Uitwerking. (i). Uit (3) met $\xi = 0$ volgt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) dx = g_R(0) = g_1(0) = 1$$

voor alle $R > 0$. Omdat $F_R(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, is het nu ook duidelijk dat $\sup_{R>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F_R(x)| dx < \infty$.

- (iii). Laat $\eta > 0$ gegeven zijn. We moeten laten zien dat $\int_{|x|\geq\eta} |F_R(x)| dx \rightarrow 0$ als $R \rightarrow \infty$. Nu is

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\eta} |F_R(x)| dx &= \int_{|x|\geq\eta} F_R(x) dx \\ &= \int_{|x|\geq\eta} R \left(\frac{\sin \pi R x}{\pi R x} \right)^2 dx \\ &\stackrel{y=Rx}{=} \int_{|y|\geq R\eta} \left(\frac{\sin \pi y}{\pi y} \right)^2 dy \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

omdat $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi y}{\pi y} \right)^2 dy < \infty$.

Conclusie: $\{F_R\}_{R>0}$ is een familie van goede kernen op $\mathbb{R}$ voor $R \rightarrow \infty$.

- (d) Laat zien dat voor $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ geldt dat

$$\int_{-R}^R \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|/R) e^{2\pi i x \xi} d\xi = (F_R * f)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

en concludeer hieruit dat $\int_{-R}^R \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|/R) e^{2\pi i x \xi} d\xi \rightarrow f(x)$ uniform als $R \rightarrow \infty$.

Uitwerking. Uit de definitie van de functie g_R volgt dat

$$\int_{-R}^R \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|/R) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) g_R(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Verder is $\hat{f}(\xi) g_R(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{F}_R(\xi) = (f * F_R)^\wedge(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ (hier gebruiken we de stelling dat $(g * h)^\wedge = \hat{g}\hat{h}$ voor alle $g, h \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$). Uit de inversie formule volgt nu dat

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|/R) e^{2\pi i x \xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * F_R)^\wedge(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= (f * F_R)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tenslotte, omdat $\{F_R\}_{R>0}$ een familie van goede kernen op $\mathbb{R}$ is voor $R \rightarrow \infty$, weten we dat $(f * F_R)(x) \rightarrow f(x)$ uniform op $\mathbb{R}$ als $R \rightarrow \infty$ en derhalve,

$$\int_{-R}^R \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|/R) e^{2\pi i x \xi} d\xi \rightarrow f(x)$$

uniform op $\mathbb{R}$ als $R \rightarrow \infty$. Klaar!