

Tentamen Fourieranalyse, WI3601

25 augustus 2010, 09.00 - 12.00 uur

- Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
- Dit tentamen bestaat uit drie opgaven.
- Normering: totaal 100 punten ($10+3\times 30$). De normering per onderdeel staat tussen haakjes aangegeven.

1. We noteren met $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ de collectie van alle continue functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor een constante $A \geq 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Zij $\{K_\delta : 0 < \delta \in \mathbb{R}\}$ een familie functies in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(a) (10) Wanneer wordt $\{K_\delta : 0 < \delta \in \mathbb{R}\}$ een "familie van goede kernen" (voor $\delta \rightarrow 0$) genoemd? (Geef de definitie).

(b) (5) Laat zien dat iedere functie $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ uniform continu is op $\mathbb{R}$.

(Aanwijzing: gebruik dat een continue functie op een gesloten begrensde interval uniform continu is).

(c) (5) Laat zien: als $\{K_\delta : 0 < \delta \in \mathbb{R}\}$ een familie van goede kernen is en als $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, dan $K_\delta * f \rightarrow f$ uniform op $\mathbb{R}$ als $\delta \rightarrow 0$.

De Poisson kern op $\mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y \in \mathbb{R}.$$

(d) (10) Laat zien dat $\{P_y : 0 < y \in \mathbb{R}\}$ een familie van goede kernen op $\mathbb{R}$ is voor $y \rightarrow 0$.

2. Zij $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ een rij in $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

voor alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- (a) (10) Laat zien: als f een 1-periodiek trigonometrisch polynoom is (dwz. $f(\theta) = \sum_{k=-M}^M a_k e^{2\pi i k \theta}$, met $a_k \in \mathbb{C}$ en $M \in \mathbb{N}$), dan geldt dat

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \rightarrow \int_0^1 f(\theta) d\theta \quad \text{als } N \rightarrow \infty. \quad (1)$$

- (b) (10) Laat zien: (1) geldt voor iedere continue 1-periodieke functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

- (c) (10) Zij $\gamma \in \mathbb{R}$ irrationaal. Toon aan dat

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 f(\theta) d\theta \quad \text{als } N \rightarrow \infty,$$

voor iedere continue 1-periodieke functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

3. De 2π -periodieke functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(\theta) = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

- (a) (10) Bereken de Fouriercoëfficiënten $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, van de functie f .

- (b) (10) Voor $N \in \mathbb{N}$ worden de partiële sommen $S_N f$ van de Fourierreeks van f gedefinieerd door $(S_N f)(\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}$. Voor welke waarden van $\theta \in [0, 2\pi)$ geldt dat $(S_N f)(\theta) \rightarrow f(\theta)$ als $N \rightarrow \infty$? Motiveer uw antwoord!

- (c) (10) Toon aan: $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$.