

**Tentamen wi3601, Fourieranalyse,
16 juni 2009, 9.00 - 12.00**

Het tentamen bestaat uit twee delen. Studenten met vrijstelling voor een van de delen hoeven het betreffende deel niet te maken.

Stellingen uit het cursusboek mogen zonder bewijs worden toegepast, mits hun precieze formulering correct geciteerd wordt. Alle antwoorden dienen uiteraard te worden gemotiveerd.

Punten deel 1: $[(4+5)+(3+5)+(3+3+4) + (3 \text{ gratis})]/3$

Punten deel 2: $[(2+3+4)+(5+4)+(3+3+3) + (3 \text{ gratis})]/3$

Deel 1

We parametriseren de eenheidscirkel S met behulp van het interval $[-\pi, \pi]$.

1. Beschouw de functie $f : S \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta, & \theta \in [-\pi, 0], \\ 0, & \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

- (a) Bepaal de Fouriercoëfficiënten van f .
(b) Convergeert de Fourierreeks van f puntsgewijs en/of uniform op $[-\pi, \pi]$ naar f ? Licht het antwoord toe.
2. Beschouw een continue functie $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ en definieer, voor vast gekozen parameter $h > 0$, de functie $A_h(f) : S \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$(A_h(f))(\theta) := \frac{1}{2h} \int_{\theta-h}^{\theta+h} f(x) dx.$$

Hier interpreteren we de integratiegrenzen modulo 2π .

- (a) Toon aan dat $A_h(f)$ continu is op S .
(b) Druk de Fouriercoëfficiënten van $A_h(f)$ uit in termen van de Fouriercoëfficiënten van f .
3. (a) Geef een voorbeeld van een Riemann integreerbare functie $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = \infty$.
(b) Bestaan er ook continue functies $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ met deze eigenschap? Licht het antwoord toe (bewijzen of expliciete voorbeelden worden niet verlangd).
(c) Bewijs dat voor iedere continu differentieerbare functie $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ geldt dat $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.
Aanwijzing: Pas de Parseval identiteit toe op f' .

Deel 2

1. Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ een Schwartzfunctie.

(a) Laat zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^k |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

(b) Laat zien dat

$$\frac{d^k f}{dx^k}(0) = (2\pi i)^k \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k \widehat{f}(\xi) d\xi \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

(c) Toon aan dat er een Schwartzfunctie $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ bestaat die voldoet aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) dx = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegeven en zij $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie, tweemaal continu differentieerbaar in de eerste variabele en continu differentieerbaar in de tweede variabele op $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, die voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) Bepaal een expliciete uitdrukking voor u in termen van f .
(b) Toon aan dat

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - f(x)|^2 dx = 0.$$

3. Laat zien dat ieder continu groepshomomorfisme $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (we beschouwen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ als groep met vermenigvuldiging als groepsoperatie) gegeven wordt door $\phi(x) = e^{i\xi x}$ voor zekere $\xi \in \mathbb{R}$, door de volgende stappen te doorlopen:

- (a) Toon aan dat $\int_0^\delta \phi(x) dx \neq 0$ voor zekere $\delta > 0$;
(b) Toon aan dat $\phi(x) = c \int_x^{x+\delta} \phi(y) dy$ voor een zekere complexe $c \neq 0$;
(c) Toon aan dat ϕ differentieerbaar is, leid een differentiaalvergelijking af waar ϕ aan voldoet, en los deze op.

EINDE