

Tussentoets Fourieranalyse (wi3601)
3 april 2008, 12.15 - 13.45

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden!

De eenheidscirkel in $\mathbb{C}$ geven we aan met S . Waar nodig identificeren we S met het interval $[-\pi, \pi]$.

1. (a) Zij $(F_N)_{N \geq 1}$ de Féjer kern. Ga na dat voor iedere Riemann integreerbare functie $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ de volgende identiteit geldt:

$$(f * F_N)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n \widehat{f}(m) e^{imx}, \quad x \in S.$$

- (b) Bespreek de convergentie-eigenschappen van deze dubbele som voor $N \rightarrow \infty$. Bewijzen worden niet gevraagd; wel precieze formuleringen van de gebruikte resultaten.
2. Zij $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ een Riemann integreerbare functie waarvan de Fouriercoëfficiënten absoluut sommeerbaar zijn. Geef een gedetailleerd bewijs dat de Fourierreeks van f uniform convergeert op S .
3. Zij $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ een C^1 -functie.

- (a) Toon aan dat

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$$

en leid hieruit af dat de reeks $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n |\widehat{f}(n)|^2$ absoluut convergeert.

Aanwijzing: Gebruik de Cauchy-Schwarz ongelijkheid.

- (b) Zij $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ een C^1 -functie met de eigenschap dat $|f(x)| = 1$ voor alle $x \in S$. Het *windingsgetal* van f is gedefinieerd als

$$w(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Laat zien dat

$$w(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |\widehat{f}(n)|^2.$$

Aanwijzing: Voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$ geldt $1/z = \bar{z}$.

Waardering: $(\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + 3 + (2 + 2) + (1 \text{ gratis})$