

Tussentoets Fourieranalyse (wi3601)
3 april 2008, 12.15 - 13.45

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden!

De eenheidscirkel in $\mathbb{C}$ geven we aan met S . Waar nodig identificeren we S met het interval $[-\pi, \pi]$.

1. (a) Zij $(F_N)_{N \geq 1}$ de Féjer kern. Ga na dat voor iedere Riemann integreerbare functie $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ de volgende identiteit geldt:

$$(f * F_N)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n \hat{f}(m) e^{imx}, \quad x \in S.$$

Uitwerking: Voor alle $x \in S$ geldt

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n \hat{f}(m) e^{imx} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (D_n * f)(x) = (f * F_N)(x),$$

waarbij de eerste identiteit volgt uit

$$\begin{aligned} (D_n * f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{m=-n}^n e^{im(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n}^n e^{imx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-imy} dy \\ &= \sum_{m=-n}^n \hat{f}(m) e^{imx}. \end{aligned}$$

- (b) Bespreek de convergentie-eigenschappen van deze dubbele som voor $N \rightarrow \infty$. Bewijzen worden niet gevraagd; wel precieze formuleringen van de gebruikte begrippen en resultaten.

Uitwerking: Aangezien de Féjer kern een goede kern is in de zin van Stein-Shakarchi, convergeert de dubbele som naar $f(x)$ in ieder continuïteitspunt x van f ($\frac{1}{2}$ punt); de definitie van een goede kern ($\frac{1}{2}$ punt) staat in Stein-Shakarchi. Als f continu is, is de convergentie uniform ($\frac{1}{2}$ punt).

2. Zij $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ een Riemann integreerbare functie waarvan de Fouriercoëfficiënten absoluut sommeerbaar zijn. Geef een gedetailleerd bewijs dat de Fourierreeks van f uniform convergeert op S .

Uitwerking: Dit is gedaan op het college. Het bewijs verloopt in twee stappen.

Stap 1: gegeven $\varepsilon > 0$, kies K zo groot dat voor alle $N > M \geq K$ geldt

$$\sum_{M+1 \leq |n| \leq N} |\hat{f}(n)| < \varepsilon.$$

Dan geldt, voor alle $x \in S$,

$$\left| \sum_{M+1 \leq |n| \leq N} \hat{f}(n)e^{inx} \right| \leq \sum_{M+1 \leq |n| \leq N} |\hat{f}(n)| < \varepsilon \quad (*)$$

en dus

$$\left| \sum_{M+1 \leq |n| \leq N} \hat{f}(n)e^{inx} \right| < \varepsilon.$$

In het bijzonder volgt uit (*) dat de reeks $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ convergeert voor iedere $x \in S$; de limiet noemen we $s(x)$.

Stap 2: Voor alle $x \in S$ en alle $M \geq K$ geldt

$$\begin{aligned} \left| s(x) - \sum_{|n| \leq M} \hat{f}(n)e^{inx} \right| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n)e^{inx} - \sum_{|n| \leq M} \hat{f}(n)e^{inx} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{M \leq |n| \leq N} \hat{f}(n)e^{inx} \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Voor alle $M \geq K$ geldt zodoende

$$\sup_{x \in S} \left| s(x) - \sum_{|n| \leq M} \hat{f}(n)e^{inx} \right| \leq \varepsilon.$$

Dit is precies wat we moesten bewijzen.

Puntenverdeling naar bevind van zaken.

3. Zij $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ een C^1 -functie.

(a) Toon aan dat

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$$

en leid hieruit af dat de reeks $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n|\hat{f}(n)|^2$ absoluut convergeert.

Aanwijzing: Gebruik de Cauchy-Schwarz ongelijkheid.

Uitwerking: Het eerste deel is een opgave uit het boek waarvan de uitwerking op Blackboard staat (1 punt). Het tweede deel (1 punt) volgt nu via

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |\hat{f}(n)|^2 \leq \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}} |n\hat{f}(n)| \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|.$$

De som rechts is eindig wegens het voorgaande. Voorts geldt voor iedere $n \in \mathbb{Z}$ dat

$$|n\hat{f}(n)| = |\hat{f}'(n)| \leq \sup_{x \in S} |f'(x)|,$$

zodat ook het supremum eindig is (de ongelijkheid volgt na uitschrijven van de definitie van de Foeriercoëfficiënten).

(b) Zij $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ een C^1 -functie met de eigenschap dat $|f(x)| = 1$ voor alle $x \in S$. Het *windingsgetal* van f is gedefinieerd als

$$w(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Laat zien dat

$$w(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |\hat{f}(n)|^2.$$

Aanwijzing: Voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$ geldt $1/z = \bar{z}$.

Uitwerking: Met de hint en de orthogonaliteit van de functies $x \mapsto e^{inx}$ vinden we ($1\frac{1}{2}$ punt)

$$\begin{aligned} w(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}'(n) e^{inx} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f}(m) e^{imx}} dx \\ &= \frac{1}{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}'(n) \overline{\hat{f}(n)} \\ &= \frac{1}{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} in \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{f}(n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \hat{f}(n). \end{aligned}$$

De tweede gelijkheid behoeft een rechtvaardiging ($\frac{1}{2}$ punt): de tweede som in de integrand convergeert uniform, maar we weten niet of de eerste som dat ook doet! Echter, beide sommen convergeren in de zin van kwadratisch gemiddelde (zgn. L^2 -convergentie). Uit de Cauchy-Schwarz ongelijkheid volgt dan het product van de sommen convergeert in de zin van het gemiddelde (zgn. L^1 -convergentie), en dat is precies wat we hier nodig hebben. Een alternatieve redenering (die echter op hetzelfde neerkomt!) die direct van de bovenste integraal rechts naar de derde expressie rechts voert gebruikt de ‘inproduct’-versie van de Parseval identiteit: als g en h Riemann integreerbaar zijn, dan geldt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \overline{h(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) \overline{\hat{h}(n)}.$$

Waardering: $(\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + 3 + (2 + 2) + (1 \text{ gratis})$