

Eindtoets Waarderen van Derivaten, Wi 3405TU

Donderdag 23 januari 2014, 18:30 - 20:30 (2 uurs tentamen)

1. a. De payoff van een *asset-or-nothing* call optie $\Lambda(S(T))$ is als volgt:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} x, & \text{for } x > E, \\ x/2, & \text{for } x = E, \\ 0, & \text{for } x < E. \end{cases}$$

Teken deze payoff en verander de onderstaande MATLAB code zodanig dat een asset-or-nothing call geprijsd wordt.

```
-----
clf
S = 3; E = 2; T = 1; r = 0.05; sigma = 0.3;
M = 400; dt = T/M; p = 0.5;
u = exp(sigma*sqrt(dt) + (r-0.5*sigma^2)*dt);
d = exp(-sigma*sqrt(dt) + (r-0.5*sigma^2)*dt);
W = max(E-S*d.^[M:-1:0]'),.*u.^[0:M]'),0);
for i = M:-1:1
    W = exp(-r*dt)*(p*W(2:i+1) + (1-p)*W(1:i));
end
disp('Option value is'), disp(W)
-----
```

- b. Beschrijf in woorden hoe een Amerikaanse optie met een binomiale boom wordt geprijsd.
2. Beschouw de Black-Scholesvergelijking:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0,$$

met een uitoefenfunctie als eindvoorwaarde op $t = T$.

- a. Gebruik de transformaties $X = \log S$ en $V(S, t) = e^{rt}W(X, t)$ en stel de volgende getransformeerde partiële differentiaalvergelijking voor onbekende $W(X, t)$ op:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial X} + B \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - CW = 0. \quad (1)$$

Bepaal A , B en C .

- b. Bepaal het expliciete eindige differentieschema voor partiële differentiaalvergelijking (1), met als onbekenden W_j^i . Houd rekening met het feit dat dit een vergelijking terugwaarts in de tijd is (die we hier niet naar een voorwaartse vergelijking transformeren). De discretisatie moet tweede orde nauwkeurig in de ruimte en eerste orde nauwkeurig in de tijd zijn.
- c. Laat zien dat met de keuze $h^2 = \sigma^2 k$ (h ruimtediscretisatieparameter, k tijdsdiscretisatieparameter) de discretisatie uit opgave 2b gelijk is aan een binomiale boomdiscretisatie in W_j^i en ook in V_j^i , na terugtransformatie.

3. De Black-Scholes formule voor de waarde van een call optie luidt:

$$C(\sigma) = SN(d_+) - Ee^{-r(T-t)}N(d_-), \text{ with}$$

$$d_{\pm} = \frac{\log(S/E) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

- a. Bereken

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} C(\sigma), \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} C(\sigma).$$

- b. Bereken de waarde $\sigma = \hat{\sigma}$ waarvoor $\partial C / \partial \sigma$ maximaal is.
- c. Beschrijf de Newton procedure om de implied volatility te berekenen met behulp van de bovengevonden resultaten.
- d. Stel, we berekenen de implied volatility voor callopties, die verhandeld worden met verschillende uitoefenprijzen. Wat verwachten we te zien? (Gebruik in je antwoord de woorden "Black-Scholes", "in-the-money", "out-of-the-money")

Controleer of u uw naam en inschrijfnummer op uw antwoordblad heeft ingevuld!