

Technische Universiteit Delft
Fac. Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Eindtoets Waarderen van Derivaten, Wi 3405TU

Vrijdag 2 februari 2013, 9:00 - 11:00 (2 uurs tentamen)

1. Een up-and-out barrier call optie kan geprijsd worden met de formule:

$$V^B(S, t) = S(N(d_+) - N(e_+) - \left(\frac{B}{S}\right)^{1+2r/\sigma^2} (N(f_+) - N(g_+))) \\ - Ee^{-r(T-t)}(N(d_-) - N(e_-) - \left(\frac{B}{S}\right)^{-1+2r/\sigma^2} (N(f_-) - N(g_-))),$$

met:

$$d_{\pm} = \frac{\log S/E + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad e_{\pm} = \frac{\log S/B + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ f_{\pm} = \frac{\log S/B - (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad g_{\pm} = \frac{\log SE/B^2 - (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

- Beschrijf de eigenschappen van een up-and-in barrier call, en van een up-and-out barrier call.
 - Benoem de parameters en variabelen in de formule voor $V^B(S, t)$.
 - Laat zien dat $V^B(S, t)$ gelijk is aan 0, voor $S = B$, en schets in een plaatje de waarde van de up-and-out call optie op $t = 0$ naast de waarde van een gewone Europese call (dezelfde E en σ).
 - Hoe kun je, met behulp van bovenstaande formule, een up-and-in barrier optie prijzen?
2. Beschouw de Black-Scholes vergelijking:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0.$$

voor een cash-or-nothing call optie, met de "in the money" waarde $V(S, T) = C^{\text{cash}}(S, T) = A$, op $t = T$.

- Wat zijn de passende randvoorwaarden en de eindvoorwaarde voor deze optie?
- De exacte oplossing luidt: $C^{\text{cash}}(S, t) = Ae^{-r(T-t)}N(d_-)$, met d_- gegeven in opgave 1. Leid een put-call parity relatie af voor de cash-or-nothing optie, voor alle $t \leq T$, en bepaal daarmee de waarde van de cash-or-nothing put optie (onder dezelfde parameters en setting).

- c. Bepaal de delta van deze cash-or-nothing call optie, en teken een plaatje van de delta vlak voor de uitoefendatum, op $t = T^-$.

3. Gegeven is de volgende Matlab code:

```
E = 4; sigma = 0.3; r = 0.03; T = 1;
L = 10; Nx = 50; Nt = 50; k = T/Nt; h = L/Nx;
T1 = diag(ones(Nx-2,1),1) - diag(ones(Nx-2,1),-1);
T2 = -2*eye(Nx-1,Nx-1) + diag(ones(Nx-2,1),1) + diag(ones(Nx-2,1),-1);
mvec = [1:Nx-1];
D1 = diag(mvec);
D2 = diag(mvec.^2);
F = (1-r*k)*eye(Nx-1,Nx-1) + 0.5*k*sigma^2*D2*T2 + 0.5*k*r*D1*T1;
B = (1+r*k)*eye(Nx-1,Nx-1) - 0.5*k*sigma^2*D2*T2 - 0.5*k*r*D1*T1;

A1 = 0.5*(eye(Nx-1,Nx-1) + F);
A2 = 0.5*(eye(Nx-1,Nx-1) + B);
U = zeros(Nx-1,Nt+1);
U(:,1) = max(E-[h:h:L-h]',0);

for i = 1:Nt
    tau = (i-1)*k;
    p1 = k*(0.5*sigma^2 - 0.5*r)*E*exp(-r*(tau));
    q1 = k*(0.5*sigma^2 - 0.5*r)*E*exp(-r*(tau+k));
    rhs = A1*U(:,i) + [0.5*(p1+q1); zeros(Nx-2,1)];
    X = A2\rhs;
    U(:,i+1) = X;
    bca = E*exp(-r*[0:k:T]);
    bcb = zeros(1,Nt+1);
    U = [bca;U;bcb];
    mesh([0:k:T],[0:h:L],U)
    xlabel('T-t'), ylabel('S'), zlabel('Put Value')
```

- Wat wordt er met deze code berekend, en geef details over de numerieke rekenmethode (beschrijf enkele relevante onderdelen van de Matlab code)?