

Tussentoets Waarderen van Derivaten, Wi 3405TU

Vrijdag 2 november 2012 9:00 - 11:00 (2 uurs tentamen)

1. a. De koers van het aandeel Elsevier ligt bij $S_0 = 10 \text{ €}$. Een call op dit aandeel met uitoefening over 60 dagen en een uitoefenprijs van $E = 10 \text{ €}$ kost $V^c = 1 \text{ €}$.

Stel een tabel op waarin op de eerste rij de aandeelkoers op de uitoefendatum varieert van 8.5 € tot 11.5 € . Zet in de tweede kolomrij het rendement, in procenten, van het aandeel; op de derde rij het rendement van de optie in procenten.

	aandeelprijs op $t = T$						
	8.5 €	9 €	9.5 €	10 €	10.5 €	11 €	11.5 €
rend. aandeel							
rend. optie							

Wat valt je op als je de winsten en verliezen in de optie- en aandeelrendementen met elkaar vergelijkt?

Uitwerking:

	aandeelprijs op $t = T$						
	8.5 €	9 €	9.5 €	10 €	10.5 €	11 €	11.5 €
rend. aandeel	-15 %	-10 %	-5 %	0 %	5 %	10 %	+15 %
rend. optie	-100 %	-100 %	-100 %	-100 %	-50 %	0 %	+50 %

De rendementen op aandelen zijn evenredig met de uiteindelijke aandeelprijs. De rendementen bij opties zijn -100 % als de aandeelprijs niet gestegen is. Als de aandeelprijs groter is dan de beginaandeelprijs plus de aankoopwaarde van de optie zal het optierendement positief worden.

Een optie is een risicovollere investering dan een aandeel.

- b. We hebben een Europese call en een put optie (met dezelfde uitoefendatum $T = 1/4$, en uitoefenprijs $E = 10 \text{ €}$). De huidige aandeelprijs is 11 € , en veronderstel een continue samengestelde rente $r = 6\%$. Bepaal een investeringsstrategie om risicovrije winst te maken op basis van arbitrage als beide opties de waarde 2.5 € hebben.

Uitwerking: De put-call parity zegt dat arbitrage niet optreedt indien:

$$C + Ee^{-rt} = P + S \Rightarrow C = P + S - Ee^{-rt}.$$

In de opgave is er sprake van een arbitragemogelijkheid:

$$C = 2.5, \quad P + S - Ee^{-rt} \approx 3.65.$$

De call is te goedkoop, of de put is te duur. Door een calloptie te kopen, een aandeel te verkopen en Ee^{-rt} op de bank te zetten, wordt de put gerepliceerd, en kan een put worden geschreven. Er wordt ingekocht voor 1.35 Euro, en verkocht voor 2.5 Euro, en zo wordt er bij uitoefening risicovrije winst gemaakt.

2. De Black-Scholes formule voor de waarde van een call optie luidt:

$$\begin{aligned} C(S, t) &= SN(d_+) - Ee^{-r(T-t)}N(d_-), \text{ with} \\ d_{\pm} &= \frac{\ln(S/E) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

- a. Benoem alle parameters en variabelen in deze formule, en geef aan welke marktaannames gemaakt zijn om deze optieprijsformule af te leiden.

Uitwerking: C is de call optie op tijd t ; T is de uitoefentijd; S is de waarde van het aandeel op tijd t ; E is de uitoefenprijs; r is de risico-vrije rente; σ is de volatiliteit. Aannames:

- * het aandeel volgt een geometrische Brownse beweging met constante coëfficiënten.
- * het aandeel is liquide en kan gekocht of verkocht worden op ieder tijdstip in willekeurige aantallen.
- * short selling is toegestaan
- * de optie is een Europese optie
- * er zijn geen transactiekosten, of dividenden; er zijn geen kosten verbonden aan het bezit van het aandeel

- b. Schrijf de variabelen $d_{\pm}$ om, met behulp van

$$m := \ln\left(\frac{Se^{r(T-t)}}{E}\right), \text{ en } \hat{\tau} := \sigma\sqrt{T-t},$$

in variabelen die alleen van m en $\hat{\tau}$ afhangen.

Hoe kun je de ongelijkheid $m \leq 0$ interpreteren?

Uitwerking:

$$\begin{aligned} d_{\pm} &= \frac{\ln(S/E) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_{\pm} &= \frac{\ln(S/E) + \ln e^{r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} \pm \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \\ d_{\pm} &= \frac{\ln(Se^{r(T-t)}/E)}{\sigma\sqrt{T-t}} \pm \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} = \frac{m}{\hat{\tau}} \pm \frac{\hat{\tau}}{2}. \end{aligned}$$

Om de ongelijkheid $m \leq 0$ te interpreteren, schrijven we deze om:

$$m = \ln\left(\frac{Se^{r(T-t)}}{E}\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{S}{E}e^{r(T-t)} \leq 1 \Rightarrow S \leq Ee^{-r(T-t)}.$$

Indien $m \leq 0$ betekent dit dat de aandeeleprijs op tijdstip t kleiner is dan de verdisconteerde strikewaarde (de putoptie is dan in-the-money).

- c. Laat zien dat voor de geschaalde put optiewaarde, $p = P/S$ geldt dat:

$$p(m, \hat{\tau}) = e^{-m}N(-d_-) - N(-d_+).$$

Uitwerking: We bepalen de putwaarde via de put-call pariteit:

$$P = C - S + Ee^{-r(T-t)} = (N(d_+) - 1)S + (1 - N(d_-))Ee^{-r(T-t)}.$$

Met de gelijkheid $N(a) + N(-a) = 1$, kan dit omgeschreven worden als:

$$P = -N(-d_+)S + N(-d_-)Ee^{-r(T-t)}$$

Met $p = P/S$ vinden we:

$$\begin{aligned} p &= -N(-d_+) + N(-d_-)\frac{E}{Se^{r(T-t)}} \\ &= -N(-d_+) + N(-d_-)\frac{1}{Se^{r(T-t)}/E} \end{aligned}$$

Er volgt voor m :

$$e^m = \frac{Se^{r(T-t)}}{E}$$

en dus:

$$p = -N(-d_+) + N(-d_-)e^{-m}$$

QED.

- d. Bereken

$$\frac{\partial p(m, \hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}}$$

en geef een interpretatie van deze afgeleide.

Uitwerking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(m, \hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} &= e^{-m}N'(-d_-)\frac{-\partial d_-}{\partial \hat{\tau}} - N'(-d_+)\frac{-\partial d_+}{\partial \hat{\tau}} \\ \frac{-\partial d_-}{\partial \hat{\tau}} &= \frac{-m}{\hat{\tau}^2} - \frac{1}{2} \\ \frac{-\partial d_+}{\partial \hat{\tau}} &= \frac{-m}{\hat{\tau}^2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\partial p(m, \hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} &= -e^{-m}\left(\frac{-m}{\hat{\tau}^2} - \frac{1}{2}\right)N'(-d_-) + N'(-d_+)\left(\frac{-m}{\hat{\tau}^2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Om de afgeleide te interpreteren, bekijken we $\hat{\tau} = \sigma\sqrt{T-t}$. $\hat{\tau}$ is een maat voor de volatiliteit over de tijd. Deze afgeleide geeft dus weer hoe snel p verandert met de volatiliteit over de tijd.

3. Een zogeheten *straddle* optieconstructie is gebaseerd op de aankoop van een call en een put op hetzelfde aandeel, met dezelfde uitoefenprijs E en hetzelfde uitoefentijdstip.

- a. Wat is de verwachte waarde van de straddle op het uitoefentijdstip? Teken de payoff voor de straddle optieconstructie.

Wat verwacht een investeerder van het marktverloop als hij/zij een straddle koopt om mee te speculeren, en wat verwacht een schrijver van een straddleconstructie, als hij/zij niet hedged?

Uitwerking: De verwachte uitbetaling is:

$$\begin{aligned} V(S, T) &= P(S, T) + C(S, T) \\ &= \max(E - S, 0) + \max(S - E, 0) = \max(|E - S|, 0) = |E - S|. \end{aligned}$$

Het plaatje representeert de combinatie van de put en de call payoff functie, een "V" met het laagste punt op $S = E$. De investeerder in deze optie verwacht dat het aandeel flink zal stijgen of dalen, meer dan de initiële kosten van de put- en callopties.

De schrijver verwacht dat de beweging in het aandeel binnen grenzen zal blijven.

- b. Schrijf een stukje Matlab code om de straddle op $t = 0$ te waarderen, op basis van de bijgevoegde Matlab code:

```
function [C, Cdelta, P, Pdelta] = ch08(S,E,r,sigma,tau)
% This is a MATLAB function
% function [C, Cdelta, P, Pdelta] = ch08(S,E,r,sigma,tau)

if tau > 0

    d1 = (log(S/E) + (r + 0.5*sigma^2)*(tau))/(sigma*sqrt(tau));
    d2 = d1 - sigma*sqrt(tau);
    N1 = 0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
    N2 = 0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
    C = S*N1-E*exp(-r*(tau))*N2;
    P = C + E*exp(-r*tau) - S;

else

    C = max(S-E,0);
```

```
P = max(E-S,0);
```

```
end.
```

Uitwerking: Functie ch08 bepaalt de waarden van een put en call optie op $t = 0$. We moeten toevoegen:

```
Straddle = C+P;
```

op de juiste plaatsen in de routine.

Controleer of u uw naam en inschrijfnummer op uw antwoordblad heeft ingevuld!