

Tussentoets Waarderen van Derivaten, Wi 3405TU

Vrijdag 4 november 2011 9:00 - 11:00 (2 uurs tentamen)

1. a. Met

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds,$$

laat zien dat geldt:

$$N(\alpha) + N(-\alpha) = 1.$$

Uitwerking: Deze kansdichtheidsfunctie is symmetrisch:

$$\begin{aligned} N(\alpha) + N(-\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 1 \end{aligned}$$

- b. Maak gebruik van het feit dat

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

en

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X) (\alpha \in \mathbb{R})$$

om aan te tonen dat geldt:

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2;$$

en laat hiermee zien dat geldt

$$\text{var}(\alpha X) = \alpha^2 \text{var}(X), \text{ met } \alpha \in \mathbb{R}$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2. \end{aligned}$$

Dan volgt ook:

$$\text{var}(\alpha X) = \mathbb{E}(\alpha^2 X^2) - (\mathbb{E}(\alpha X))^2 = \alpha^2 \mathbb{E}(X^2) - \alpha^2 (\mathbb{E}(X))^2 = \alpha^2 \text{var}(X).$$

2. (In opgave 2. mag je gebruik maken van de identiteit:

$$SN'(d_+) - e^{-r(T-t)}EN'(d_-) = 0,$$

waarin $N'(\cdot)$ de afgeleide van $N(\cdot)$ representeert.)

De Black-Scholes formule voor de waarde van een call optie luidt:

$$C = SN(d_+) - Ee^{-r(T-t)}N(d_-), \text{ met } d_{\pm} = \frac{\ln S/(Ee^{-r(T-t)}) \pm \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

- a. Benoem alle parameters en variabelen in deze formule, en geef aan welke marktaannames gemaakt zijn om deze optieprijsformule af te leiden.

Uitwerking: C is de call optie op tijd t; T is de uitoefentijd; S is de waarde van het aandeel op tijd t; E is de uitoefenprijs; r is de risico-vrije rente; σ is de volatiliteit. Aannames:

- * het aandeel volgt een geometrische Brownse beweging met constante coëfficiënten.
- * het aandeel is liquide en kan gekocht of verkocht worden op ieder tijdstip in willekeurige aantallen.
- * short selling is toegestaan
- * de optie is een Europese optie
- * er zijn geen transactiekosten, of dividenden; er zijn geen kosten verbonden aan het bezit van het aandeel

- b. Laat zien dat voor alle S-waarden geldt:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} > 0.$$

Uitwerking: De delta van een call optie vanuit de Black-Scholes formule is gegeven als

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1).$$

met $N(\cdot)$ gegeven in opgave 1. Met de definitie van $N(\cdot) \in [0, 1]$ is het gevraagde aangetoond.

- c. Gebruik de Black-Scholes formule om een uitdrukking voor de vega van de call optie af te leiden.

Uitwerking: We hebben:

$$vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = SN'(d_+)\frac{\partial d_+}{\partial \sigma} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_-)\frac{\partial d_-}{\partial \sigma}.$$

Je kunt afleiden dat $\frac{\partial d_{\pm}}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_{\pm}}{\partial \sigma} + \sqrt{T-t}$. Gebruik makend van de gegeven identiteit, vinden we:

$$vega = SN'(d_+)\sqrt{T-t}.$$

- d. Teken de payoff van een call optie $(S - E)^+$ als een functie van *uitoefenprijs* E , en teken in hetzelfde plaatje ook de waarde van call C (op een zekere tijd voor maturity) als functie van E .

3. Beschouw het volgende stukje Matlab code:

```
sig=0.5; r=0.1; E=1, S0=1; T=0.5; L=1e2; M=50; dt=T/L;  
W = randn(M,L);  
Svals = S0*cumprod(exp((r-sig^2/2)*dt+sig*dt*W),2);  
Svals = [S0*ones(M,1) Svals];
```

- a. Beschrijf wat de code probeert te berekenen, en geef aan waar een programmeerfout gemaakt wordt die tot een verkeerd antwoord leidt (en hoe dit te verbeteren).

Uitwerking: De code probeert de aandeeleprijs onder geometrische Brownse beweging te simuleren, met 100 tijdstappen en 50 simulaties. In de tweede term in regel 3: `sig*dt*W` ontbreekt het wortelteken. Het moet zijn `sig*sqrt(dt)*W`. Je kunt dit verbeteren door die wortel toe te voegen. Ook staat er een komma in de eerste regel waar je een punt-komma nodig hebt in Matlab. dat is een kleiner issue.

- b. Beschrijf hoe je de nauwkeurigheid van de verkregen antwoorden zou kunnen bepalen.

Uitwerking:

Je zou de sample mean en sample variance kunnen bepalen, en zien dat die zijn zoals je verwacht. Je zou naar de return kunnen kijken, en bevestigen dat deze normaal verdeeld is, en als het niet het geval is heb je een fout gemaakt. Je zou naar de sum-of-square-asset prices kunnen kijken, en de vaste waarde die hier verwacht wordt kunnen analyseren.

Controleer of u uw naam en inschrijfnummer op uw antwoordblad heeft ingevuld!