
Tentamen Kansmodellen voor Finance wi3414TU & wi3417TU
24 januari 2011, 9.00–12.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.

Normering: Vraag 1 telt voor 11 punten (6+5), vraag 2 voor 7 punten, vraag 3 voor 10 punten (2+2+2+2+2), vraag 4 voor 9 punten (6+3), en vraag 5 voor 9 punten; er zijn 4 kado-punten. Het cijfer wordt verkregen door het behaalde aantal punten door 5 te delen.

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Stel dat de aandelprijs op tijd $t = 0$ gelijk is aan $S_0 = 80$. De prijs op tijd $t = 1$ hangt af van de uitkomst van een worp met een munt: als H bovenkomt gaat de prijs met 10 omhoog en als T bovenkomt met 10 omlaag. Dus $S_1(H) = 90$ en $S_1(T) = 70$. De prijs op tijd $t = 2$ hangt af van de prijs op het vorige tijdstip en de uitkomst van een tweede worp met de munt: als H bovenkomt gaat de prijs met 10 omhoog en als T bovenkomt met 10 omlaag. Dus

$$\begin{aligned} S_2(HH) &= S_1(H) + 10 = 100, \\ S_2(HT) &= S_1(H) - 10 = 80, \\ S_2.TH) &= S_1(T) + 10 = 80, \\ S_2(TT) &= S_1(T) - 10 = 60, \end{aligned}$$

enzovoort. Dus $S_3 = S_2 + 10$ als bij een derde worp met de munt H bovenkomt en $S_3 = S_2 - 10$ als T boven komt. Neem verder aan dat de rente $r = 0$. Definieer $Y_n = \sum_{k=0}^n S_k$, $n = 0, 1, 2, 3$. Een Aziatische optie die afloopt op tijd $T = 3$ betaalt $\max(\frac{1}{4}Y_3 - 80, 0)$.

- (a) Wat is de prijs van deze optie op tijd $t = 0$?
- (b) Zij $v_n(s, y)$ de prijs van deze optie op tijd n als $S_n = s$ en $Y_n = y$. Geef de formule voor $v_3(s, y)$ en maak een algoritme om de v_n uit v_{n+1} te berekenen.
2. Men werpt herhaaldelijk met een *zuivere* munt. Zij $X_j = 1$ als de j de worp in H resulteert en $X_j = -1$ als de j de worp in T resulteert. Beschouw het stochastisch proces $M_0, M_1, M_2, \dots$ gedefinieerd door $M_0 = 0$ en

$$M_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad n \geq 1.$$

Toon aan dat $Y_n = M_n^2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ een martingaal is.

3. Geef aan voor ieder van de volgende beweringen of deze in het algemeen “juist” of “onjuist” is.
- (a) In een N -staps binomiaal model is r de rente en S_n de aandelprijs. Dan geldt voor $n < N$ dat $\tilde{\mathbb{E}}_n[S_N] = (1 + r)^{-n} S_n$.

- (b) We beschouwen het N perioden model met τ een stoptijd met de eigenschap dat altijd $\tau < N$. Dan is $\tau + 1$ ook een stoptijd.
 - (c) Als M_n een positieve martingaal is, dan is $\log(M_n)$ een supermartingaal.
 - (d) Je speelt een reeks (onafhankelijke) spelen, waar je elke keer 7 euro kunt winnen met kans $\frac{1}{2}$, en 7 euro kunt verliezen met kans $\frac{1}{2}$. Je hebt besloten naar huis te gaan zodra je 14 euro verdient hebt. Claim: dit lukt je met kans 1, maar je zult gemiddeld meer dan 100 000 spelletjes moeten spelen.
 - (e) We vergelijken de prijs van een Amerikaanse optie met $N = 3$ perioden met een eeuwigdurende Amerikaanse optie met dezelfde startkoers, dezelfde rentevoet, en dezelfde up- en downfactor. De eeuwigdurende Amerikaanse optie is goedkoper.
4. De waarde van een aandeel is op dit moment 100. Over alle twee de komende 2 perioden van 6 maanden gaat die ofwel omhoog met 5% ofwel omlaag met 5%. De risico-vrije rente is 2% per half jaar.
- (a) Bereken de prijs van de eenjarige Amerikaanse put optie bij dit aandeel, met een strike van 100 euro.
 - (b) Wat is de optimale uitoefeningsstrategie?
5. Gegeven is een Amerikaanse optie bij het 4 perioden binomiale model met upfactor $u = 2$ en downfactor $d = 1/2$, rente 25%, en beginkoers $S_0 = 4$. De intrinsieke waarde van de optie is

$$G_n = \max\{S_n/2, S_n - 5\},$$

m.a.w. als de koers lager is dan 10 dan krijg je de helft uitgekeerd, is hij 10 of meer dan krijg je de koers min 5.

Wat is de prijs van deze optie?

Antwoorden:

1a

ω	$S_1(\omega)$	$S_2(\omega)$	$S_3(\omega)$	$V_3(\omega)$	$V_2(\omega)$	$V_1(\omega)$	$V_0(\omega)$
HHH	90	100	110	15	20/2	25/4	25/8
HHT	90	100	90	10			
HTH	90	80	90	5	5/2		
HTT	90	80	70	0			
THH	70	80	90	0	0	0	
THT	70	80	70	0			
TTH	70	60	70	0	0		
TTT	70	60	50	0			

1b $v_3(s, y) = \max(\frac{1}{4}y - 80, 0)$ en $v_n(s, y) = \frac{1}{2}(v_{n+1}(s + 10, y + s + 10) + v_{n+1}(s - 10, y + s - 10))$.

2

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_n[Y_{n+1}] &= \mathbb{E}_n[(M_n + X_{n+1})^2 - (n + 1)] \\
 &= \mathbb{E}_n[M_n^2 + 2M_nX_{n+1} + X_{n+1}^2 - (n + 1)] \\
 &= M_n^2 + 2M_n\mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - (n + 1) \\
 &= M_n^2 - n.
 \end{aligned}$$

3a Onjuist. De linkerkant is niet verdisconteerd.

3b Juist. De gebeurtenis $\{\tau + 1 = m\}$ is gelijk aan $\{\tau = m - 1\}$. Omdat τ een stoptijd is hangt deze alleen af van $(\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$, maar dan hangt dus zeker $\{\tau + 1 = m\}$ alleen af van $(\omega_1, \dots, \omega_{m-1}, \omega_m)$. Dus $\tau + 1$ is een stoptijd.

3c Juist. Dit volgt met Conditional Jensen ($\varphi(x) = \log(x)$) is concaaf).

3d Dit is allemaal juist: het spel is equivalent met de symmetrische stochastische wandeling met de stoptijd τ_2 . In hoofdstuk 5 is behandeld dat deze met kans eindig is, maar een oneindige verwachting heeft (dus i.h.b. groter dan 100 000).

3e Onjuist, want je hebt juist meer mogelijkheden om uit te oefenen.

4a De risicovrije kans is $\tilde{p} = (1.02 - 0.95)/(1.05 - 0.95) = 0.7$, en de verdisconteringsfactor is $50/51 = 0.98039$

Boom:

$$\begin{array}{rcl}
 & & 110.25 \ (V_2 = 0) \\
 & 105 \ (V_1 = \max\{0, 0.0735\}) & \\
 100 & & 99.75 \ (V_2 = 0.25) \\
 & 95 \ (V_1 = \max\{5, 3.039\}) & \\
 & & 90.25 \ (V_2 = 9.75)
 \end{array}$$

Dus:

$$V_0 = 0.98039 * [0.7 * (0.0735) + 0.3 * 5] = 1.5210.$$

4b Bij omhoog gaan (koers 105 na 6 mnd) niet stoppen, bij omlaag gaan (koers 95 na 6 mnd) wél stoppen.

5 Omdat G_n alleen van de koers afhangt, en deze functie convex is en 0 bij koers 0, moet je niet stoppen vóór tijdstip 4. De waarde is dan gelijk aan de Europese waarde, dus

$$V_0^A = V_0^E = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{(1+r)^4} V_N \right] = \left(\frac{4}{5} \right)^4 * \left(\frac{1}{2} \right)^4 * \left(59 + 4*11 + 6*2 + 4*\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1874}{625} = 2.9984.$$