
Tentamen Kansmodellen voor Finance wi3414TU
25 januari 2010, 9.00–12.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.

Normering: Vraag 1 telt voor 10 punten (2+4+4), vraag 2 voor 8 punten (3+5), vraag 3 voor 10 punten (2+2+2+2+2) punten, vraag 4 voor 8 punten (5+3), en vraag 5 voor 10 punten (2+8); er zijn 4 kado-punten. Het cijfer wordt verkregen door het behaalde aantal punten door 5 te delen.

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Gegeven: een financiële markt met een aandeel met waarde S_n op tijdstip n dat één van de volgende vier prijsverlopen kan hebben:

- 1.) $S_0 = 50 \quad S_1 = 40 \quad S_2 = 20$
- 2.) $S_0 = 50 \quad S_1 = 40 \quad S_2 = 60$
- 3.) $S_0 = 50 \quad S_1 = 60 \quad S_2 = 80$
- 4.) $S_0 = 50 \quad S_1 = 60 \quad S_2 = 50$.

Verder is gegeven een risicoloos product A_n dat op tijdstip n de volgende waarden aanneemt:

$$A_0 = 100 \quad A_1 = 105 \quad A_2 = 110.$$

- (a) Teken een boom met de mogelijke waarden van S_n op tijdstippen 0, 1, 2.
 - (b) Bereken bij elk van de drie knopen op tijdstip 0 en 1 wat de risicovrije kansen zijn. (We maken een portfolio met aandelen en het risicoloze product.)
 - (c) Leg uit wat het betekent dat (S_n/A_n) een martingaal is t.o.v. de risicovrije kansen. Illustreer met een berekening bij één knoop.
2. Er wordt herhaaldelijk gegooid met een zuivere munt. Zij $X_j = 1$ als de j^{de} worp in Kop resulteerde en $X_j = -1$ als bij de j^{de} worp Munt boven kwam. Het stochastisch proces $M_0, M_1, M_2, \dots$ is gedefinieerd door $M_0 \equiv 0$ en

$$M_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad n \geq 1.$$

- (a) Wat is de kans dat $M_4 = 0$?
 - (b) Zij τ_1 het tijdstip waarop voor het eerst niveau 1 wordt bereikt, d.w.z. $\tau_1 = \min\{n : M_n = 1\}$. Wat is de kans dat $\tau_1 = 7$?
3. Geef voor ieder van de vijf volgende beweringen aan of deze in het algemeen “juist” of “onjuist” is.
- (a) De waarde van een Europese call gaat omlaag als de rente r stijgt.
 - (b) Als τ een stoptijd is, dan is τ^2 ook een stoptijd.

- (c) Een voorbeeld van een barrier optie is een Europese call die alleen uitbetaalt als de waarde van de onderliggende asset gedurende de looptijd van de optie beneden een bepaalde, in het optiecontract gespecificeerde grens is gebleven. Zo'n barrier optie is goedkoper dan de bijbehorende Europese call zonder barrier.
 - (d) Als M_n een martingaal is, dan is e^{M_n} een supermartingaal.
 - (e) Als $\mathbb{P}$ en $\tilde{\mathbb{P}}$ kansen zijn op dezelfde uitkomstenverzameling Ω , dan heeft $\tilde{\mathbb{P}}$ altijd een Radon-Nikodym afgeleide ten opzichte van $\mathbb{P}$.
4. Beschouw een Amerikaanse put optie met strike $K = 8$, in het binomiale model met beginkoers $S_0 = 4$, up-factor $u = 2$, down-factor $d = \frac{1}{2}$, en rente factor $1 + r = \frac{8}{7}$, over $N = 2$ periodes.
- (a) Bereken de prijs V_0 van deze optie.
 - (b) Wat is de beste uitoefeningsstrategie voor een houder van deze optie?
5. In een 3-steps binomiaal model met uitkomstenverzameling

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

is de risico-neutrale kans gegeven door

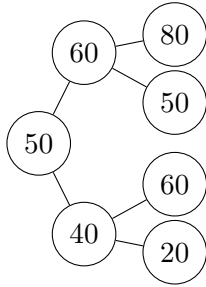
$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}\{HHH\} &= \frac{1}{8}, \tilde{\mathbb{P}}\{HHT\} = \frac{1}{8}, \tilde{\mathbb{P}}\{HTH\} = \frac{1}{12}, \tilde{\mathbb{P}}\{HTT\} = \frac{1}{6} \\ \tilde{\mathbb{P}}\{THH\} &= \frac{1}{12}, \tilde{\mathbb{P}}\{THT\} = \frac{1}{12}, \tilde{\mathbb{P}}\{TTH\} = \frac{1}{9}, \tilde{\mathbb{P}}\{TTT\} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

- (a) Definieer de stochast X als het aantal maal H in de uitkomst. Bereken $\tilde{\mathbb{E}}_1[X]$.
- (b) Definieer een interest rate proces $(R_n; n = 0, 1, 2)$, zodat een investering in de kapitaalmarkt van 1 Euro op tijd n op tijd $n + 1$ een gegroeid is naar een waarde $1 + R_n$.

$$\begin{aligned}R_0 &\equiv 0 \\ R_1(H) &= \frac{2}{5}, \quad R_1(T) = \frac{1}{6} \\ R_2(HH) &= \frac{1}{4}, \quad R_2(HT) = \frac{1}{4}, \quad R_2(TH) = 0, \quad R_2(TT) = 1.\end{aligned}$$

Bereken de prijs op tijd $n = 0$ van een zero-coupon bond die 1 Euro uitbetaalt op tijd $n = 3$.

Antwoorden:



1a

1b Bij de meest linkse knoop:

$$\tilde{p} = \frac{\frac{A_1}{A_0} - \frac{S_1(40)}{S_0}}{\frac{S_1(60)}{S_0} - \frac{S_1(40)}{S_0}} = \frac{\frac{105}{100} - \frac{40}{50}}{\frac{60}{50} - \frac{40}{50}} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

(Vergelijking voor $\tilde{p}$ direct inzien, of de vermogensvergelijking van het portfolio opstellen.)
De andere twee: $\tilde{p}_1(H) = \frac{3}{7}$, $\tilde{p}_1(T) = \frac{23}{42}$.

1c Het stochastisch proces $(M_n) = (S_n/A_n)$ voldoet dan aan $\mathbb{E}_n[M_{n+1}] = M_n$. Bijvoorbeeld voor $n = 0$:

$$\tilde{\mathbb{E}}_0[M_1] = \frac{5}{8} \cdot \frac{60}{105} + \frac{3}{8} \frac{40}{105} = \frac{420}{840} = \frac{1}{2} = M_0.$$

Andere knoop:

$$\tilde{\mathbb{E}}_1[M_2](H) = \frac{3}{7} \cdot \frac{80}{110} + \frac{4}{7} \frac{50}{110} = \frac{4}{7} = M_1(H).$$

2a Er zijn 6 paden met precies twee -1^{en} , dus $6 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8}$.

2b De paden $(\omega_1, \dots, \omega_7)$, die horen bij deze gebeurtenis moeten allemaal $\omega_1 = -1$, en $\omega_6 = \omega_7 = +1$ hebben. Daar tussen kun je op $6-1=5$ manieren van niveau -1 naar niveau -1 zonder 1 te raken, dus deze kans is $5/128 = 0.039 \dots$

3a Onjuist. Beschouw een eenstaps binomiaal model voor een aandeel met beginprijs S_0 en $d < 1+r < u$. De prijs op tijd $t = 0$ van een call optie met strike K , $dS_0 < K < uS_0$, die afloopt op tijd $t = 1$ wordt dan gegeven door

$$\frac{1}{1+r} \tilde{\mathbb{E}}[(S_1 - K)^+] = \frac{1}{1+r} (uS_0 - K) \frac{(1+r) - d}{u - d} = \frac{uS_0 - K}{u - d} \left(1 - \frac{d}{1+r}\right).$$

Er volgt dat de prijs stijgt als r stijgt.

Het antwoord op deze vraag hangt af van het model voor de asset prijs. Zo is voor het Black-Scholes model de afgeleide van de prijs naar r groter dan nul, zodat de prijs hier ook de richting van de rente r volgt.

Het argument voor de binomiale boom dat berust op de observatie dat de factor $1/(1+r)^n$ in de prijs $\frac{1}{(1+r)^n} \tilde{\mathbb{E}}[(S_n - K)^+]$ van de call optie dalend is in r is niet correct omdat het voorbijgaat aan de verandering in de risico-neutrale kans $\tilde{p}$ als r verandert.

3b Juist. Omdat $\tau \geq 0$ is de gebeurtenis $\{\tau^2 = m^2\}$ gelijk aan $\{\tau = m\}$. Omdat τ een stoptijd is hangt deze alleen af van $(\omega_1, \dots, \omega_m)$, maar dan hangt zéker $\{\tau^2 = m^2\}$ alleen af van $(\omega_1, \dots, \omega_{m^2})$. Dus τ^2 is een stoptijd. N.B. Velen hadden hier als antwoord: onjuist omdat τ^2 buiten de periode N zou vallen. Er is echter geen sprake van een vaste periode: zou ook N^2 kunnen zijn of onbegrensd: Chapter 5. Wij hebben aan dit antwoord dan toch 1 punt toegekend.

3c Juist. De uitbetaling van de barrier optie is hoogstens gelijk aan de uitbetaling van de Europese call zonder barrier. Dus de waarde van de barrier kan niet hoger zijn dan de call zonder barrier vanwege het no-arbitrage principe.

3d Onjuist. Uit de conditionele vorm van Jensen's ongelijkheid volgt dat $\mathbb{E}_n[\exp(M_{n+1})] \geq \exp(M_n)$ en hieruit volgt dat e^{M_n} een submartingaal is.

3e Onjuist. Allen waar als $\mathbb{P}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{P}}(\omega) = 0$.

4a De risico neutrale kansen zijn $\tilde{p} = 3/7$ en $\tilde{q} = 4/7$. De prijs formule wordt dus

$$v_n(s) = \max \left\{ 8 - s, \frac{7}{8} \left(\frac{3}{7} v_{n+1}(2s) + \frac{4}{7} v_{n+1}\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right\} = \max \left\{ 8 - s, \frac{3}{8} v_{n+1}(2s) + \frac{1}{2} v_{n+1}\left(\frac{s}{2}\right) \right\}.$$

Startend met $v_2(16) = 0$, $v_2(4) = 4$, $v_2(1) = 7$, vinden we $v_1(8) = 2$, en $v_1(2) = 6$, en dan $v_0 = 4$.

4b Meteen uitoefenen! (Want $V_0 = G_0$)

5a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_1[X](H) &= 3\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} + 2\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} \\ &\quad + 2\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} + \tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} \end{aligned}$$

Nu is

$$\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_1 = H\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \tilde{\mathbb{P}}\{\omega_1 = T\},$$

dus $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{4}$, $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{4}$, $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{6}$ en $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{3}$. Dus $\tilde{\mathbb{E}}_1[X](H) = \frac{23}{12}$. We kunnen op dezelfde manier $\tilde{\mathbb{E}}_1[X](T)$ berekenen maar het kan sneller door op te merken dat $\tilde{\mathbb{E}}[X] = \frac{95}{72} = \tilde{\mathbb{E}}_1[X](H) \times \mathbb{P}\{\omega_1 = H\} + \tilde{\mathbb{E}}_1[X](T) \times \mathbb{P}\{\omega_1 = T\}$. We krijgen dan $\tilde{\mathbb{E}}_1[X](T) = \frac{13}{18}$.

5b Uit formule (6.2.4) van Shreve volgt dat de prijs gelijk is aan

$$B_{0,3} = \tilde{\mathbb{E}}_0 \left[\frac{D_3}{D_0} \right] = \tilde{\mathbb{E}}[D_3].$$

Nu is $D_3(HH) = 4/7$, $D_3(HT) = 4/7$, $D_3(TH) = 6/7$ en $D_3(TT) = 3/7$. Dus $B_{0,3} = 4/7 \times 1/4 + 4/7 \times 1/4 + 6/7 \times 1/6 + 3/7 \times 1/3 = 4/7$.