
Tentamen Kansmodellen voor Finance wi3414TU
1 juli 2010, 9.00–12.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.

Normering: Vraag 1 telt voor 10 punten (2+4+4), vraag 2 voor 8 punten (3+5), vraag 3 voor 10 punten (2+2+2+2+2) punten, vraag 4 voor 8 punten (5+3), en vraag 5 voor 10 punten (2+8); er zijn 4 kado-punten. Het cijfer wordt verkregen door het behaalde aantal punten door 5 te delen.

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Beschouw bij het binomiale boom model met beginkoers $S_0 = 10$, up-factor $u = 2$ en down-factor $d = 1/2$ een Europese call optie met strike $K = 15$. De rente is 10% ($r = 0.1$). Uitbetaling geschiedt op tijdstip $N = 3$. Wat is de waarde V_0 van deze optie?
2. Laat $(X_j)_{j=0}^\infty$ een rij onafhankelijke gelijkverdeelde stochasten zijn met $\mathbb{E}[X_j] = 1$ en $X_j > 0$ voor alle j . Het stochastisch proces $M_0, M_1, M_2, \dots$ is gedefinieerd door $M_0 \equiv 1$ en

$$M_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n, \quad n \geq 1.$$

Bewijs dat (M_n) een martingaal is.

3. Geef voor ieder van de vijf volgende beweringen aan of deze in het algemeen “juist” of “onjuist” is.
 - (a) Ieder binomiaal model is vrij van arbitrage.
 - (b) Als τ_1 en τ_2 stoptijden zijn, dan is $\tau_1 + \tau_2$ ook een stoptijd.
 - (c)
 - (d) Als M_n een positieve martingaal is, dan is $\log M_n$ een supermartingaal.
 - (e) Alleen als de rente 0 is dan is de prijs van een zero coupon bond een martingaal in het binomiale model.
4. Beschouw een Amerikaanse put optie met strike $K = 8$, in het binomiale model met beginkoers $S_0 = 4$, up-factor $u = 2$, down-factor $d = \frac{1}{2}$, en rente factor $1 + r = \frac{8}{7}$, over $N = 2$ periodes.
 - (a) Bereken de prijs V_0 van deze optie.
 - (b) Wat is de beste uitoefeningsstrategie voor een houder van deze optie?
5. In een 3-steps binomiaal model met uitkomstenverzameling

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

is de risico-neutrale kans gegeven door

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}\{HHH\} &= \frac{1}{8}, \tilde{\mathbb{P}}\{HHT\} = \frac{1}{8}, \tilde{\mathbb{P}}\{HTH\} = \frac{1}{12}, \tilde{\mathbb{P}}\{HTT\} = \frac{1}{6} \\ \tilde{\mathbb{P}}\{THH\} &= \frac{1}{12}, \tilde{\mathbb{P}}\{THT\} = \frac{1}{12}, \tilde{\mathbb{P}}\{TTH\} = \frac{1}{9}, \tilde{\mathbb{P}}\{TTT\} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

- (a) Definieer de stochast X als het aantal maal H in de uitkomst. Bereken $\widetilde{\mathbb{E}}_1[X]$.
- (b) Definieer een interest rate proces $(R_n; n = 0, 1, 2)$, zodat een investering in de kapitaalmarkt van 1 Euro op tijd n op tijd $n + 1$ een gegroeid is naar een waarde $1 + R_n$.

$$\begin{aligned}
 R_0 &\equiv 0 \\
 R_1(H) &= \frac{2}{5}, \quad R_1(T) = \frac{1}{6} \\
 R_2(HH) &= \frac{1}{4}, \quad R_2(HT) = \frac{1}{4}, \quad R_2(TH) = 0, \quad R_2(TT) = 1.
 \end{aligned}$$

Bereken de prijs op tijd $n = 0$ van een zero-coupon bond die 1 Euro uitbetaalt op tijd $n = 3$.

Antwoorden:

1 $\tilde{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d} = .4, \tilde{q} = u - (1+r)u - d = .6.$

ω	S_1	S_2	S_3	V	$Kans$
HHH	$10u$	$10u2$	$10u3$	65	p^3
HHT	$10u$	$10u2$	$10u2d$	5	p^2q
HTH	$10u$	$10ud$	$10u2d$	5	p^2q
HTT	$10u$	$10ud$	$10ud2$	0	pq^2
THH	$10d$	$10ud$	$10u2d$	5	p^2q
THT	$10d$	$10ud$	$10ud2$	0	pq^2
TTH	$10d$	$10d2$	$10ud2$	0	pq^2
TTT	$10d$	$10d2$	$10d3$	0	q^3

Dus

$$V_0 = (1+r)^{-3} \mathbb{E}[V] = (1+r)^{-3} (65p^3 + 15p^2q) = 4.2074.$$

2

3a Onjuist

3b Juist.

3c

3d Juist. (de conditionele vorm van Jensen's ongelijkheid volgt dit)

3e Waar

4a De risico neutrale kansen zijn $\tilde{p} = 3/7$ en $\tilde{q} = 4/7$. De prijs formule wordt dus

$$v_n(s) = \max \left\{ 8 - s, \frac{7}{8} \left(\frac{3}{7} v_{n+1}(2s) + \frac{4}{7} v_{n+1}\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right\} = \max \left\{ 8 - s, \frac{3}{8} v_{n+1}(2s) + \frac{1}{2} v_{n+1}\left(\frac{s}{2}\right) \right\}.$$

Startend met $v_2(16) = 0$, $v_2(4) = 4$, $v_2(1) = 7$, vinden we $v_1(8) = 2$, en $v_1(2) = 6$, en dan $v_0 = 4$.

4b Meteen uitoefenen! (Want $V_0 = G_0$)

5a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_1[X](H) &= 3\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} + 2\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} \\ &\quad + 2\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} + \tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} \end{aligned}$$

Nu is

$$\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_1 = H\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \tilde{\mathbb{P}}\{\omega_1 = T\},$$

dus $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{4}$, $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = H, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{4}$, $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = H \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{6}$ en $\tilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = T, \omega_3 = T \mid \omega_1 = H\} = \frac{1}{3}$. Dus $\tilde{\mathbb{E}}_1[X](H) = \frac{23}{12}$. We kunnen op dezelfde manier $\tilde{\mathbb{E}}_1[X](T)$ berekenen maar het kan sneller door op te merken dat $\tilde{\mathbb{E}}[X] = \frac{95}{72} = \tilde{\mathbb{E}}_1[X](H) \times \mathbb{P}\{\omega_1 = H\} + \tilde{\mathbb{E}}_1[X](T) \times \mathbb{P}\{\omega_1 = T\}$. We krijgen dan $\tilde{\mathbb{E}}_1[X](T) = \frac{13}{18}$.

5b Uit formule (6.2.4) van Shreve volgt dat de prijs gelijk is aan

$$B_{0,3} = \tilde{\mathbb{E}}_0 \left[\frac{D_3}{D_0} \right] = \tilde{\mathbb{E}}[D_3].$$

Nu is $D_3(HH) = 4/7$, $D_3(HT) = 4/7$, $D_3(TH) = 6/7$ en $D_3(TT) = 3/7$. Dus $B_{0,3} = 4/7 \times 1/4 + 4/7 \times 1/4 + 6/7 \times 1/6 + 3/7 \times 1/3 = 4/7$.