
Toets Kansmodellen voor Finance wi3417TU
27 oktober 2010, 9.00–11.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.

Normering: Vraag 1 telt voor 10 punten (5 voor elk onderdeel), vraag 2 en vraag 3 elk voor 5 punten, elk van de drie onderdelen van vraag 4 voor 2 punten; er zijn 4 kado-punten. Het cijfer is maximaal 6 (de overige vier punten komen uit de inleveropgaven) en wordt verkregen door het behaalde aantal punten door 5 te delen.

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Beschouw het binomiale model met beginkoers $S_0 = 4$, up-factor $u = 2$, down-factor $d = 1/2$, en met een rente van 25% ($r = 1/4$). Definieer $m_n = \min(S_0, \dots, S_n)$. Gegeven is een optie waarvan de uitbetaling op tijdstip $N = 3$ gegeven wordt door

$$V_3 = S_3 - m_3.$$

- (a) Bereken de prijs V_0 van deze optie.
 - (b) Een agent verkoopt de optie voor de in onderdeel (a) berekende prijs. De eerste twee worpen met de munt resulteren beide in H . Hoeveel aandelen moet de agent op tijd 2 kopen om zijn short positie in de optie te hedgen.
2. Er wordt herhaaldelijk gegooid met een zuivere munt. Zij $X_j = 1$ als de j^{de} worp in Kop resulteerde en $X_j = -1$ als bij de j^{de} worp Munt boven kwam. Het stochastisch proces $M_0, M_1, M_2, \dots$ is gedefinieerd door $M_0 \equiv 0$ en

$$M_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad n \geq 1.$$

Laat zien dat het proces M_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, een Markov proces is.

3. Vervolg op opgave 1. Een handelaar die gezien heeft dat de eerste twee worpen in H geresulteerd zijn, maakt de inschatting dat de kans op H in de derde beurt groter is dan $1/2$. Zou u de handelaar adviseren om de optie te kopen?
4. Geef aan voor ieder van de volgende beweringen of deze in het algemeen “juist” of “onjuist” is.
 - (a) De prijs van een Europese put optie kan eenvoudig berekend worden uit de prijs van een Europese call optie die uitgeschreven is op dezelfde onderliggende asset, met dezelfde aflooptijd en dezelfde strike.
 - (b) In een binomiale boom is de verdisconteerde prijs van een aandeel waarop dividend wordt uitgekeerd een martingaal onder de risico-neutrale kansen $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$.
 - (c) Voor iedere waarde van de rente r is een binomiaal model vrij van arbitrage.

Antwoorden:

1a De verdisconteringsfactor $1/(1+r) = 4/5$, en de risico-neutrale kansen zijn $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (1/2, 1/2)$.

$$\begin{aligned} V_3(HHH) &= 28 & V_2(HH) &= \frac{64}{5} \\ V_3(HHT) &= 4 & V_1(H) &= \frac{144}{25} \\ V_3(HTH) &= 4 & V_2(HT) &= \frac{8}{5} \\ V_3(HTT) &= 0 & V_0 &= \frac{344}{125} \\ V_3(THH) &= 6 & V_2(TH) &= \frac{12}{5} \\ V_3(THT) &= 0 & V_1(T) &= \frac{28}{25} \\ V_3(TTH) &= 1 & V_2(TT) &= \frac{2}{5} \\ V_3(TTT) &= 0 \end{aligned}$$

1b $\Delta_2(HH) = (28 - 4)/(32 - 8) = 1$.

2 Zij f een willekeurige functie. Omdat $M_{n+1} = M_n + X_{n+1}$, is

$$\mathbb{E}_n[f(M_{n+1})] = \mathbb{E}_n[f(M_n + X_{n+1})] = \frac{1}{2}(f(M_n + 1) + f(M_n - 1)).$$

Definieer $g(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) + f(x-1))$. Dan is $\mathbb{E}_n[f(M_{n+1})] = g(M_n)$ en hieruit volgt dat M_n een Markov proces is.

3 Als de conditionele kans op H bij de derde worp gegeven wordt door $1/2 + \delta$ met $\delta > 0$, dan is de verdisconteerde verwachte opbrengst van de optie gelijk aan $(4/5) * (28 * (1/2 + \delta) + 4 * (1/2 - \delta))$ minus $64/5$, de kosten van de optie. Na vereenvoudiging krijgen we $(96/5)\delta$. Dus als de inschatting van de handelaar juist is dan zou hij misschien moeten kopen. We zien aan dezelfde berekening dat de verdisconteerde verwachtingswaarde van de opbrengst negatief is als de conditionele kans op H kleiner is dan $1/2$. Overigens is het zo dat als bij de derde worp T bovenkomt het verlies op tijd 3 gelijk is aan 8! Statistisch gezien dit wil zeggen gemiddeld op de lange duur zal de strategie "kopen als de verwachte opbrengst positief is" lonend zijn. Maar er is veel onzekerheid omdat de handelaar ook een verkeerde inschatting van de kansverdeling kan maken.

4a Juist, dit is de put-call parity.

4b Onjuist, zie Shreve Exercise 2.10(iii).

4c Onjuist, nodige en voldoende voorwaarde is $d < 1 + r < u$.