
Tentamen Kansmodellen voor Finance wi3414TU
23 januari 2009, 9.00–12.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.

Normering: Vraag 1 telt voor 10 punten (5 voor elk onderdeel), vraag 2 voor 10 punten, elk van de zes onderdelen van vraag 3 voor 2 punten, de onderdelen van vraag 4 voor resp. 6 en 4 punten, en vraag 5 voor 5 punten; er zijn 3 kado-punten. Het cijfer wordt verkregen door het behaalde aantal punten door 5 te delen.

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Beschouw in het binomiale model met beginkoers $S_0 = 4$, up-factor $u = 2$, down-factor $d = 1/2$, en met een rente van 25% ($r = 1/4$) een optie waarvan de uitbetaling op tijdstip $N = 3$ gegeven wordt door

$$V_3 = \max([S_3 - S_2]/2 - 8, 0).$$

- (a) Bereken de prijs V_0 van deze optie.
- (b) Een agent verkoopt de optie voor de in onderdeel (a) berekende prijs. Hoeveel aandelen moet de agent op tijd 0 kopen om zijn short positie in de optie te hedgen.
2. Er wordt herhaaldelijk gegooid met een zuivere munt. Zij $X_j = 1$ als de j^{de} worp in Kop resulteerde en $X_j = -1$ als bij de j^{de} worp Munt boven kwam. Het stochastisch proces $M_0, M_1, M_2, \dots$ is gedefinieerd door $M_0 \equiv 0$ en

$$M_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad n \geq 1.$$

Laat zien dat het proces $M_n^2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, een martingaal is.

3. Geef aan voor ieder van de volgende beweringen of deze in het algemeen “juist” of “onjuist” is.
- (a) Als de prijs van een contract 0 is dan moet de uitbetaling ook 0 zijn.
- (b) In een binomiale boom is het prijsproces van het aandeel een martingaal onder de risico-neutrale kansen $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$.
- (c) In een binomiale boom is het prijsproces van het aandeel een Markov proces onder de risico-neutrale kansen $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$.
- (d) De gemiddelde groeisnelheid $\tilde{E}S_{n+1}/\tilde{E}S_n$ van de prijs onder de risico-neutrale kansen $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$ hangt niet af van de up- en de down-factor u en d .
- (e) Ieder binomiaal model is vrij van arbitrage.
- (f) Alleen als de rente 0 is dan is de prijs van een zero coupon bond een martingaal in het binomiale model.

4. Beschouw een Amerikaanse put optie met strike $K = 6$, in het binomiale model met beginkoers $S_0 = 4$, up-factor $u = 2$, down-factor $d = \frac{1}{2}$, en rente factor $1 + r = \frac{5}{4}$, over $N = 2$ periodes.

(a) Bereken de prijs V_0 van deze optie.

(b) Wat is de beste uitoefeningsstrategie voor een houder van deze optie?

5. Bij een algemene Amerikaanse optie met looptijd $N = 3$ in het binomiale model besluit een handelaar uit te oefenen op tijdstip τ gegeven door

$$\begin{aligned}\tau(HHH) &= 0, & \tau(HHT) &= 0, & \tau(HTH) &= 1, & \tau(HTT) &= 1, \\ \tau(THH) &= 2, & \tau(THT) &= 2, & \tau(TTH) &= 3, & \tau(TTT) &= 3.\end{aligned}$$

Is τ een stoptijd?