TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

Tentamen IN1305-A/IN1305-I
Fundamentele Informatica 1: Logica

18 januari 2010, 9.00–12.00 uur

- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 2.
- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 20 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = 1 + \frac{9}{100} \cdot$ (aantal punten).
- De **bonusopgave** (4.b) telt mee als je zonder bonus op een voldoende zou komen.
- Wil je op het eerste vel je **TurningPoint ID** schrijven?
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Evenmin is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier)**.
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan interpretatie over, maar wees duidelijk in wat je bedoelt.
- Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. **Waarheidstafels**

   (a) Beschouw de volgende redenering: $\neg(p \wedge r), \neg(p \to q) \therefore q \vee s$.

      i. (4 punten) Laat met behulp van een waarheidstafel zien dat deze redenering ongeldig is, en geef een tegenvoorbeeld dat dit aantoont. Beargumenteer hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid laat zien.

      ii. (6 punten) Geef 1 formule uit $PROP$ die, wanneer hij als premisse aan de redenering wordt toegevoegd, de redenering geldig maakt. Je formule moet tenminste de variabelen p, q en r bevatten. (Zie ook opgave 4.b.)

   (b) (10 punten) Geef een formule met daarin p, q en r voor de volgende waarheidstafel, dus een formule die op de plaats van het vraagteken kan staan zodat de waarheidstafel klopt. (Hint: DNV.)

p	q	r	?
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2. **Meta-beweringen**

   Bepaal of de volgende meta-beweringen waar of onwaar zijn. Als je denkt dat een bewering waar is, geef dan een bewijs, waarin je redeneert over valuaties en waarheidsfuncties (gebruik geen waarheidstafel), en de definitie van $\models$ gebruikt. Als je denkt dat een bewering onwaar is, geef een tegenvoorbeeld, en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de metabewering laat zien.

   (a) (10 punten) Als $A \models B \to C$ dan $B \models A \to C$.

   (b) (10 punten) Als $A \models \neg A$ dan $\models A \to C$.

3. **Boommethode**

   (a) (6 punten) Ga met behulp van de boommethode na of de volgende bewering waar of onwaar is. Beargumenteer hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je denkt dat de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld, en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de bewering laat zien.

$$A \to ((B \to C) \to D), \neg(A \to D) \models \neg(B \to C).$$

   (b) (8 punten) Wanneer we het 2-plaatsige predicaat $M(x, y)$ gebruiken om aan te geven dat valuatie x een model is voor formule y, dan kunnen we de metabewering bij opgave 2.a schrijven als:

$$\forall x(M(x, A) \to (M(x, B) \to M(x, C))) \models \forall x(M(x, B) \to (M(x, A) \to M(x, C))).$$

   Ga met behulp van de boommethode na of deze bewering waar of onwaar is. Beargumenteer hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je denkt dat de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld (in de vorm van een plaatje), en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de bewering laat zien.

   (c) (6 punten) Laat met behulp van de boommethode zien dat de volgende bewering niet waar is. Construeer ook een tegenvoorbeeld (in de vorm van een plaatje), en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de bewering laat zien.

$$\exists x(P(x) \wedge \neg M(x)), \exists x(M(x) \wedge \neg S(x)) \models \exists x(P(x) \wedge \neg S(x)).$$

4. **Fitch**

   (a) Zij $A, B, C, D \in PROP$. Bewijs in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende metabeweringen. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.

      i. (10 punten) $A \vee B \vdash (A \to B) \to B$.

      ii. (10 punten) $\neg(A \wedge C), C, A \wedge \neg B \vdash D$.

   (b) (10 bonus punten) Geef de corresponderende metabewering die hoort bij je redenering van vraag 1.a.ii, dus inclusief jouw formule die de redenering **geldig** maakt:

   $\neg(p \wedge r), \neg(p \to q), \langle$jouw formule hier$\rangle \vdash q \vee s$.

   Bewijs nu in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch deze metabewering. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.

5. **Verzamelingen**

   (a) (6 punten) Bepaal van de volgende bewering of hij waar of onwaar is. Als je denkt dat hij waar is, geef een verzameling A die aan deze voorwaarde voldoet. Als je denkt dat hij niet waar is, bewijs dan dat zo'n verzameling A niet kan bestaan.

   Er bestaat een verzameling A zodat $\mathscr{P}(A) = \emptyset$, waar $\mathscr{P}(A)$ de machtsverzameling van A is.

   (b) Zij gegeven de verzamelingen C en D in universum U. Bepaal of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Als je denkt dat een bewering waar is, geef er een bewijs voor. Als je denkt dat een bewering onwaar is, geef een tegenvoorbeeld in de vorm van specifieke verzamelingen, en beargumenteer hoe je tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.

      i. (7 punten) Als $C \subseteq D^c$ dan $D \nsubseteq C^c$.

      ii. (7 punten) Als $C \nsubseteq D$ dan $D^c \nsubseteq C^c$.

Einde tentamenopgaven