TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen IN1305-A/IN1305-I
Fundamentele Informatica 1: Logica

18 januari 2010, 9.00–12.00 uur

- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 11.
- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 20 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = 1 + \frac{9}{100} \cdot$ (aantal punten).
- De **bonusopgave** (4.b) telt mee als je zonder bonus op een voldoende zou komen.
- Wil je op het eerste vel je **TurningPoint ID** schrijven?
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Evenmin is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar** (**gebruik eerst kladpapier**).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan interpretatie over, maar wees duidelijk in wat je bedoelt.
- Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. **Waarheidstafels**

   (a) Beschouw de volgende redenering: $\neg(p \wedge r), \neg(p \rightarrow q) \therefore q \vee s$.

   i. (4 punten) Laat met behulp van een waarheidstafel zien dat deze redenering ongeldig is, en geef een tegenvoorbeeld dat dit aantoont. Beargumenteer hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid laat zien.

Antwoord:

p	q	r	s	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$r)$	,	$\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\therefore$	q	$\vee$	s
0	0	0	0	1		0			0		1				0	
0	0	0	1	1		0			0		1				1	
0	0	1	0	1		0			0		1				0	
0	0	1	1	1		0			0		1				1	
0	1	0	0	1		0			0		1				1	
0	1	0	1	1		0			0		1				1	
0	1	1	0	1		0			0		1				1	
0	1	1	1	1		0			0		1				1	
1	0	0	0	**1**		0			**1**		0				**0**	
1	0	0	1	**1**		0			**1**		0				**1**	
1	0	1	0	0		1			1		0				0	
1	0	1	1	0		1			1		0				1	
1	1	0	0	1		0			0		1				1	
1	1	0	1	1		0			0		1				1	
1	1	1	0	0		1			0		1				1	
1	1	1	1	0		1			0		1				1	

De redenering is inderdaad ongeldig, want niet in alle gevallen waarin de premissen waar zijn (de beide vetgedrukte regels), is ook de conclusie waar. Er is één tegenvoorbeeld, namelijk $v(p) = 1$, en $v(q) = v(r) = v(s) = 0$. In dat geval zijn de beide premissen waar, maar is de conclusie onwaar, wat de redenering ongeldig maakt.

Commentaar: Dit hadden de meesten wel goed. Wat me het meest opviel was dat sommigen niet de standaardvolgorde van het opsommen van valuaties gebruikten, en dat maakt het nakijken lastig.

   ii. (6 punten) Geef 1 formule uit $PROP$ die, wanneer hij als premisse aan de redenering wordt toegevoegd, de redenering geldig maakt. Je formule moet tenminste de variabelen p, q en r bevatten. (Zie ook opgave 4.b.)

Antwoord: We bekijken de situatie waarin de beide eerste premissen waar zijn:

p	q	r	s	$\neg(p \wedge r)$	$\neg(p \rightarrow q)$	$q \vee s$
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1

We moeten nu dus zorgen voor een formule die in deze rijen een 0 en een 1 onder elkaar heeft, **òf** een 0 en een 0 (maar die dus in elk geval niet in de eerste van de twee rijen 1 mag zijn). In het eerste geval zijn alle premissen alleen in de onderste van deze twee regels waar, net als de conclusie. En in het tweede geval zijn de premissen nooit tegelijkertijd waar, en is de redenering dus sowieso geldig. Een formule die het eerste bereikt is bijvoorbeeld $p \rightarrow s$, maar omdat we ook q en r moeten gebruiken, nemen we $(p \rightarrow s) \vee (q \wedge r)$. Een formule die het tweede bereikt is bijvoorbeeld $p \wedge (q \wedge r)$.

Commentaar: Ook dit is vaak goed gedaan, de meest voorkomende problemen waren dat enkelen een formule gaven die de redenering niet geldig maakt, maar vooral dat sommigen formules gaven die niet element van $PROP$ zijn.

   (b) (10 punten) Geef een formule met daarin p, q en r voor de volgende waarheidstafel, dus een formule die op de plaats van het vraagteken kan staan zodat de waarheidstafel klopt. (Hint: DNV.)

p	q	r	?
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Antwoord: Het eenvoudigst is het om een formule in DNV te schrijven (zie ook *Beschrijven en Bewijzen*, pagina 33 bovenaan). Een mogelijk antwoord is dus:

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r).$$

We kunnen ook een formule afleiden. Als p onwaar is (bovenste helft van de waarheidstafel), moet de formule waar zijn als $q \wedge r$ waar is, dus $\neg p \to (q \wedge r)$ voldoet hier. (Deze formule is waar in de gehele onderste helft van de waarheidstafel, omdat daar het antecedent $\neg p$ onwaar is.) In de onderste helft is p waar, en moet de formule waar zijn als $q \oplus r$ waar is, waar $\oplus$ staat voor de 'exclusieve of:' q of r is waar, maar niet allebei. Er geldt $q \oplus r \equiv (q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r)$, dus de formule die in de onderste helft moet gelden is $p \to ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))$. Deze formule is in de gehele bovenste helft waar, dus de conjunctie van beide geeft een ander mogelijk antwoord:

$$(\neg p \to (q \wedge r)) \wedge (p \to ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))).$$

Uiteraard zijn beide gegeven formules equivalent aan elkaar (dit kan worden aangetoond met het algoritme voor het omschrijven van de tweede antwoord naar disjunctieve normaalvorm zoals gegeven in *Beschrijven en Bewijzen*, pagina 33 onderaan (zie ook *Logica*, pagina 52)), en er zijn bovendien meerdere mogelijke formules.

Commentaar: Bij deze opdracht, die nog beter is gemaakt dan de vorige, stond juist niet gegeven dat de formule in $PROP$ moest zitten, want een formule in DNV zit in de regel niet in $PROP$. Bijna iedereen had dit of goed of fout (veel andere mogelijkheden zijn er ook niet). Om te beginnen gaven veel mensen de DNV hierboven. Wat verder veel mensen was opgevallen is dat de gevraagde formule waar moet zijn wanneer 2 van de 3 propositievariabelen waar zijn. Dit leidde soms tot het antwoord $((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r))$, maar dat is niet voldoende, want deze formule is ook waar als $v(p) = v(q) = v(r) = 1$ (en dan moest de formule onwaar zijn). Je hebt dus de conjunctie nodig van deze formule en de formule $\neg(p \wedge q \wedge r)$, en gelukkig stond deze conditie er vaak wel bij. Wat een aantal mensen ook probeerden was de 'exclusieve of' van de 3 disjuncten hierboven, dus $(p \wedge q) \oplus (p \wedge r) \oplus (q \wedge r)$, maar ook de waarde van deze formule is 1 wanneer $v(p) = v(q) = v(r) = 1$, omdat je de waarde van deze formule niet in één keer kunt evalueren, maar de beide XORs achtereenvolgens moet evalueren. In dit geval is bijvoorbeeld $v((p \wedge q) \oplus (p \wedge r)) = 0$ (omdat ze beide waarde 1 hebben, en dus niet slechts één van beide de waarde 1), en dus de waarde van de $\oplus$ van deze formule en $q \wedge r$ gelijk aan 1! Wat er bedoeld was is een soort $\bigoplus[(p \wedge q), (p \wedge r), (q \wedge r)]$, hoewel dat een beetje een rare notatie is (vergelijk sectie 5.3 in het *Beschrijven en Bewijzen* deel van het dictaat).

2. **Meta-beweringen**

Bepaal of de volgende meta-beweringen waar of onwaar zijn. Als je denkt dat een bewering waar is, geef dan een bewijs, waarin je redeneert over valuaties en waarheidsfuncties (gebruik geen waarheidstafel), en de definitie van $\models$ gebruikt. Als je denkt dat een bewering onwaar is, geef een tegenvoorbeeld, en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de metabewering laat zien.

(a) (10 punten) Als $A \models B \to C$ dan $B \models A \to C$.

Antwoord: Deze bewering is waar. De intuïtie van de uitspraak in het antecedent is in feite dat A en B premissen zijn voor conclusie C, en dat zegt het consequent ook, dus als het antecedent waar is, is het consequent dat ook. Het correcte antwoord is als volgt.

Bewijs. We nemen aan dat $A \models B \to C$ en moeten bewijzen dat $B \models A \to C$. De aanname zegt dat (A, B en C staan voor dusdanige formules uit $PROP$ dat) alle valuaties die model zijn voor A, ook model zijn voor $B \to C$. Dus voor alle valuaties geldt dat als ze A waar maken, ze ook $B \to C$ waar maken. Om te bewijzen dat $B \models A \to C$ moeten we voor een willekeurige valuatie waarvoor geldt dat $v(B) = 1$ laten zien dat voor die valuatie ook geldt $v(A \to C) = 1$. Neem dus een willekeurige valuatie v waarvoor geldt $v(B) = 1$. Nu moeten we aantonen dat $v(A \to C) = 1$. We onderscheiden twee (elkaar uitsluitende) mogelijkhheden:

$\mathbf{v(A) = 0}$**:** Als $v(A) = 0$, dan is $v(A \to C) = \max(1 - v(A), v(C)) = \max(1 - 0, v(C)) = \max(1, v(C)) = 1$, ongeacht $v(C)$.

$\mathbf{v(A) = 1}$**:** Als $v(A) = 1$, dan zegt de aanname dat $v(B \to C) = 1$. We weten dat $v(B) = 1$, dus geldt $v(B \to C) = \max(1 - v(B), v(C)) = \max(1 - 1, v(C)) = \max(0, v(C)) = 1$, en dat betekent dat $v(C) = 1$. Nu is dus $v(A \to C) = \max(1 - v(A), v(C)) = \max(1 - 1, 1) = \max(0, 1) = 1$.

In beide situaties, dus in het algemeen voor de willekeurige valuatie waarvoor geldt $v(B) = 1$ geldt ook $v(A \to C) = 1$, en omdat we redeneerden over een willekeurige valuatie waarvoor $v(B) = 1$, geldt dit voor alle valuaties waarvoor $v(B) = 1$, hetgeen te bewijzen was, of: QED

Commentaar: Deze opgave en de volgende zijn heel slecht gemaakt. Voor beide heeft niemand meer dan 8 punten gehaald. Hoewel veel mensen zagen dan de beweringen beide waar zijn, begonnen de problemen al met de structuur van de beweringen, die beide implicaties zijn. Er is maar **één manier om een implicatie te bewijzen**, en dan is **door het antecedent aan te nemen, en onder die aanname het consequent af te leiden**. Dan is het antecedent een voldoende voorwaarde voor het consequent, en dus de implicatie waar. Veel bewijzen begonnen niet eens met "Stel dat $A \models B \to C$ waar is."

Hoewel ik er verder nog bij gezegd heb dat je in je bewijs moet redeneren over valuaties en waarheidsfuncties, en de definitie van $\models$ moet gebruiken, heb ik dat nauwelijks teruggezien. Als men al $A \models B \to C$ aannam, werd dat vaak geïnterpreteerd als, "dan is $v(A) = 1$ en $v(B \to C) = 1$," maar de implicatie hierin wordt dan gemist. Waar het juist om gaat is dat dit zegt dat *als* een valuatie model is voor A, hij *dan* ook model is voor $B \to C$. Opvallend veel bewijzen 'redeneerden' daarnaast over wanneer het antecedent niet waar is, dat dan $v(A) = v(B) = 1$ moet zijn, en $v(C) = 0$, en dat onder die omstandigheden het consequent ook onwaar is, maar dat is geen bewijs! Dat bewijst de *converse* van de gegeven bewering (die overigens ook waar is), want daar is het de contrapositie van, niet van de gegeven bewering.

Het consequent afleiden onder de aanname dat het antecedent waar is, betekent het bewijzen dat $B \models A \to C$. Dit betekent dat elke valuatie die model is van B ook model van $A \to C$ moet zijn, dus eigenlijk dat de verzameling valuaties die model zijn van B een deelverzameling moet zijn van de verzameling valuaties die model zijn van $A \to C$. De manier om dat te bewijzen is een willekeurige valuatie te nemen die model is van B, en te laten zien dat die valuatie ook model is voor $A \to C$ (zie hierboven voor het bewijs).

(b) (10 punten) Als $A \models \neg A$ dan $\models A \to C$.

Antwoord: Deze bewering is waar. Een valuatie die, als hij A waar maakt, ook $\neg A$ waar maakt, kan niet bestaan. Dan maken alle valuaties dus $\neg A$ waar, en dan kan $\models A \to C$ aangetoond worden. Het correcte antwoord is als volgt.

Bewijs. We nemen aan dat $A \models \neg A$ en moeten bewijzen dat $\models A \to C$, oftewel dat voor alle valuaties geldt $v(A \to C) = 1$. Wat betreft de aanname: stel dat er een valuatie bestaat waarvoor geldt $v(A) = 1$. Volgens de aanname $A \models \neg A$ geldt voor deze valuatie ook dat $v(\neg A) = 1$, maar dat is een contradictie. Zo'n valuatie waarvoor geldt $v(A) = 1$ kan dus niet bestaan, wat betekent dat voor alle valuaties geldt $v(A) = 0$. Kijken we nu naar wat we moeten bewijzen, dan zien we dat dus voor alle valuaties geldt $v(A \to C) = \max(1 - v(A), v(C)) = \max(1 - 0, v(C)) = \max(1, v(C)) = 1$, ongeacht de valuatie van C. QED

Commentaar: Behalve het commentaar op de vorige opgave, is hier nog het vermelden waard dat het antecedent niet zo goed begrepen is. De uitspraak $A \models \neg A$ is vaak als contradictie geïnterpreteerd, om te vervolgen met, "en dan is alles waar," maar zo simpel was het niet. Als $A \models \neg A$ waar is, dan is A een contradictie, niet het hele antecedent. Er kan dan namelijk geen valuatie bestaan die model is voor A, want die zou dan gelijk ook model zijn voor $\neg A$ en dat geeft een tegenspraak. In termen van de notatie van vraag 3.b leidt de aanname dat $\exists x M(x, A)$ tot een tegenspraak, wat met $\neg$-intro leidt tot de conclusie $\neg\exists x M(x, A)$, wat equivalent is met $\forall x \neg M(x, A)$, en omdat een valuatie model is voor een formule of voor de negatie van de formule, geldt $\forall x M(x, \neg A)$, wat inhoudt dat A een contradictie is. Nu kunnen we eenvoudig laten zien dat $A \to C$ een tautologie is, wat het consequent van de bewering zegt, door een willekeurige valuatie te nemen en te laten zien dat die model is voor $A \to C$ (zie verder hierboven).

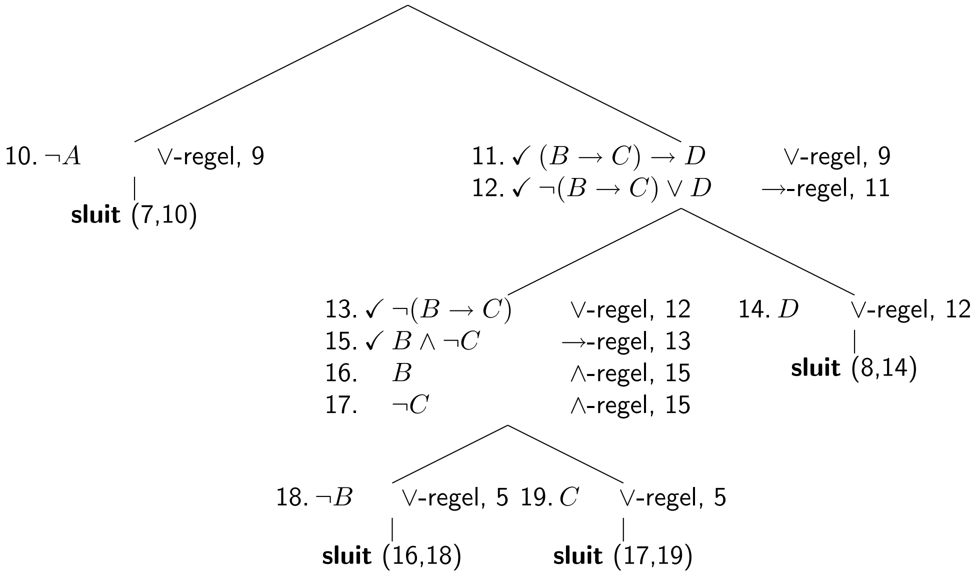
3. **Boommethode**

(a) (6 punten) Ga met behulp van de boommethode na of de volgende bewering waar of onwaar is. Beargumenteer hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je denkt dat de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld, en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de bewering laat zien.

$$A \to ((B \to C) \to D), \neg(A \to D) \models \neg(B \to C).$$

Antwoord: Dit is opgave 5.3.1.d uit het dictaat Logica.

1. ✓ $A \to ((B \to C) \to D)$ hypothese 1
2. ✓ $\neg(A \to D)$ hypothese 2
3. ✓ $\neg\neg(B \to C)$ $\neg$-conclusie
4. ✓ $B \to C$ $\neg$-regel, 3
5. ✓ $\neg B \vee C$ $\to$-regel, 4
6. ✓ $A \wedge \neg D$ $\to$-regel 2
7. A $\wedge$-regel, 6
8. $\neg D$ $\wedge$-regel, 6
9. ✓ $\neg A \vee ((B \to C) \to D)$ $\to$-regel, 1



Alle takken sluiten, dus de redenering is geldig: het is niet mogelijk een model te vinden van de premissen en de negatie van de conclusie.

Commentaar: Deze opgave is goed gemaakt: meer dan de helft had hier de volle score voor. Ik ontdekte in verschillende uitwerkingen bovendien wat ik zelf over het hoofd had gezien: dat je na 13 de tak kunt sluiten vanwege een contradictie tussen 13 en 4. Het antwoord verandert er uiteraard niet door. Veel patroon in de gemaakte fouten kon ik verder niet ontdekken, of het moet zijn dat mensen soms boommethode-regels op subformules toepassen: je mag bijvoorbeeld niet uit $\neg(B \to C)$ de formule $\neg(\neg B \vee C)$ afleiden, maar je moet $B \wedge \neg C$ afleiden.

(b) (8 punten) Wanneer we het 2-plaatsige predicaat $M(x, y)$ gebruiken om aan te geven dat valuatie x een model is voor formule y, dan kunnen we de metabewering bij opgave 2.a schrijven als:

$$\forall x(M(x,A) \to (M(x,B) \to M(x,C))) \models \forall x(M(x,B) \to (M(x,A) \to M(x,C))).$$

Ga met behulp van de boommethode na of deze bewering waar of onwaar is. Beargumenteer hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je denkt dat de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld (in de vorm van een plaatje), en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de bewering laat zien.

Antwoord:

1.	*	$\forall x(M(x,A) \to (M(x,B) \to M(x,C)))$	hypothese 1
2.	✓	$\neg\forall x(M(x,B) \to (M(x,A) \to M(x,C)))$	$\neg$-conclusie
3.	✓	$\exists x\neg(M(x,B) \to (M(x,A) \to M(x,C)))$	$\forall$-regel, 2
4.	✓	$\neg(M(a,B) \to (M(a,A) \to M(a,C)))$	$\exists$-regel, 3
5.	✓	$M(a,B) \wedge \neg(M(a,A) \to M(a,C))$	$\to$-regel, 4
6.		$M(a,B)$	$\wedge$-regel, 5
7.	✓	$\neg(M(a,A) \to M(a,C))$	$\wedge$-regel, 5
8.	✓	$M(a,A) \wedge \neg M(a,C)$	$\to$-regel, 7
9.		$M(a,A)$	$\wedge$-regel, 8
10.		$\neg M(a,C)$	$\wedge$-regel, 8
11.	✓	$M(a,A) \to (M(a,B) \to M(a,C))$	$\forall$-regel, 1
12.	✓	$\neg M(a,A) \vee (M(a,B) \to M(a,C))$	$\to$-regel, 11

13. $\neg M(a,A)$ $\vee$-regel, 12
sluit (9, 13)

14. ✓ $M(a,B) \to M(a,C)$ $\vee$-regel, 12
15. ✓ $\neg M(a,B) \vee M(a,C)$ $\to$-regel, 14

16. $\neg M(a,B)$ $\vee$-regel, 15
sluit (6, 16)

17. $M(a,C)$ $\vee$-regel, 15
sluit (10, 17)

Alle takken sluiten, dus de gegeven bewering is waar. Merk op dat dit antwoord moet corresponderen met je antwoord bij vraag 2.a. De **afleiding** in het bewijs van de stelling bij 2.a en de **boom** hierboven zijn *alternatieve* manieren om de geldigheid van de bewering vast te stellen.

Commentaar: Gelukkig kwamen maar weinig mensen tot een andere conclusie dan ze bij vraag 2.a hadden gegeven. Maar toch zijn er nog veel punten verloren gegaan bij deze opgave, bijvoorbeeld weer door het toepassen van regels op subformules, maar vooral door verkeerd of helemaal niet te substitueren. Sommige mensen substitueren helemaal niet, maar behouden kwantoren en de variabele x tot onderin de boom. Als er wordt gesubstitueerd, hou er dan rekening mee dat je *eerst* een object voor een existentieel gekwantificeerde variabele invult ($\exists x$ in regel 3), en daarna pas datzelfde object voor een universeel gekwantificeerde variabele ($\forall x$ in regel 1). Regel 3 zegt namelijk dat er een x bestaat waarvoor de uitspraak $\neg(\cdots)$ geldt, en dat object geef ik vervolgens een naam, namelijk a (in regel 4). Voor *alle* objecten geldt de conditie in regel 1, dus die geldt ook voor a, wat ik hierboven in regel 11 opmerk. Als je eerst a substitueerd voor de x in $\forall x(\cdots)$ in regel 1, moet je daarna bij regel 3 een *nieuwe* x kiezen, bijvoorbeeld b. *Daarna* mag je over b wel weer stellen dat de formule tussen haakjes in regel 1 waar is, met alsnog een sluitende boom tot gevolg.

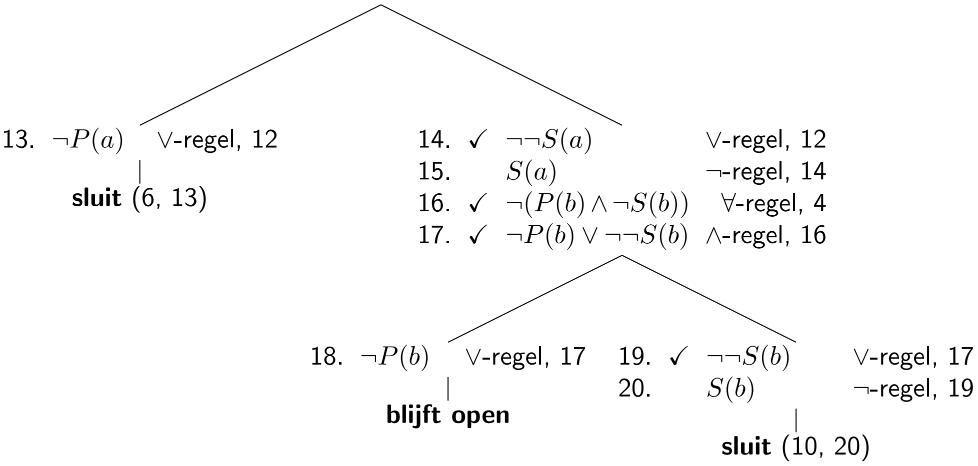
Het feit dat er in deze opgave maar over één zo'n specifiek object hoeft te worden geredeneerd, maakt dat er hiermee beduidend minder fouten zijn gemaakt dan in opgave 3.c.

(c) (6 punten) Laat met behulp van de boommethode zien dat de volgende bewering niet waar is. Construeer ook een tegenvoorbeeld (in de vorm van een plaatje), en beargumenteer hoe dat de onjuistheid van de bewering laat zien.

$$\exists x(P(x) \land \neg M(x)), \exists x(M(x) \land \neg S(x)) \models \exists x(P(x) \land \neg S(x)).$$

Antwoord:

1. ✓ $\exists x(P(x) \land \neg M(x))$ hypothese 1
2. ✓ $\exists x(M(x) \land \neg S(x))$ hypothese 2
3. ✓ $\neg\exists x(P(x) \land \neg S(x))$ $\neg$-conclusie
4. * $\forall x \neg(P(x) \land \neg S(x))$ $\exists$-regel, 3
5. ✓ $P(a) \land \neg M(a)$ $\exists$-regel, 1
6. $P(a)$ $\land$-regel, 5
7. $\neg M(a)$ $\land$-regel, 5
8. ✓ $M(b) \land \neg S(b)$ $\exists$-regel, 2
9. $M(b)$ $\land$-regel, 8
10. $\neg S(b)$ $\land$-regel, 8
11. ✓ $\neg(P(a) \land \neg S(a))$ $\forall$-regel, 4
12. ✓ $\neg P(a) \lor \neg\neg S(a)$ $\land$-regel, 11



13. $\neg P(a)$ $\lor$-regel, 12
sluit (6, 13)

14. ✓ $\neg\neg S(a)$ $\lor$-regel, 12
15. $S(a)$ $\neg$-regel, 14
16. ✓ $\neg(P(b) \land \neg S(b))$ $\forall$-regel, 4
17. ✓ $\neg P(b) \lor \neg\neg S(b)$ $\land$-regel, 16

18. $\neg P(b)$ $\lor$-regel, 17
blijft open

19. ✓ $\neg\neg S(b)$ $\lor$-regel, 17
20. $S(b)$ $\neg$-regel, 19
sluit (10, 20)

Tenminste één van de takken blijft open, dus er is een valuatie die tegelijkertijd alle premissen waar maakt, en de conclusie onwaar. De redenering is dus inderdaad ongeldig.

Een tegenvoorbeeld kunnen we construeren door te kijken naar de openblijvende tak van de boom. We moeten een structuur maken (dat mag in de vorm van een plaatje) waarin alle formules waar zijn die in de openblijvende tak geen '✓' hebben, dus formules 4(!), 6, 7, 9, 10, 15, en 18. Formule 4 is weliswaar gebruikt om andere formules uit af te leiden (namelijk 11 en 16), maar blijft vanwege de $\forall$ niettemin geldig (vandaar de *).

In het tegenvoorbeeld hebben we 3 verzamelingen nodig, P, M, en S, in een domein (dus 3 cirkels in een rechthoek). Er zijn 2 objecten nodig, a en b: a moet in de doorsnede van P en S zitten, maar mag niet in M zitten (volgens formules 6, 15, en 7). Object b moet in M zitten, maar niet in S en niet in P (volgens formules 9, 10, en 18). Aan formule 4 is ook voldaan, want a zit in S en b zit niet in P. Nu zijn beide premissen waar, want a zit in P en niet in M (premisse 1), en b zit in M maar niet in S (premisse 2). De conclusie is echter onwaar, want a noch b zit in P maar niet in S: a zit wel in P maar ook in S, en b zit niet in S maar ook niet in P.

Commentaar: Dit ging inderdaad een stuk minder goed dan opgave 3.b. Het grootste probleem zat in het substitueren: velen substitueerden voor de x waarvan in formules 1 en 2 wordt gezegd dat hij bestaat hetzelfde object a. Dat is natuurlijk niet de bedoeling, er is namelijk niet gegeven dat het hetzelfde object is waar formules 1 en 2 over gaan, en dan moet je veronderstellen dat het een ander object is, namelijk b zoals hierboven. Wanneer je wel 2 keer a invult sluit de boom meteen ($M(a)$ en $\neg M(a)$ zijn dan waar), hoewel dat er sommigen niet van weerhield door te gaan met afleiden, omdat in de opgave vermeldt staat dat de redenering ongeldig is, en de boom dus ergens open moet blijven. Ik wilde hiermee toetsen of men wist hoe een tegenvoorbeeld geconstrueerd moet worden in een boom met een tak die open blijft, maar er waren er zelfs die de opgave niet goed gelezen hadden, en gewoon een boom construeerden met alleen sluitende takken.

4. **Fitch**

   (a) Zij $A, B, C, D \in PROP$. Bewijs in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende metabeweringen. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.

   i. (10 punten) $A \vee B \vdash (A \to B) \to B$.

Antwoord:

1	$A \vee B$	hypothese 1
2	$\quad A \to B$	hypothese 2
3	$\quad A \vee B$	rei, 1
4	$\quad\quad A$	hypothese 3
5	$\quad\quad A \to B$	rei, 2
6	$\quad\quad B$	$\to$-elim, 4, 5
7	$\quad\quad B$	hypothese 4
8	$\quad\quad B$	rei, 7
9	$\quad B$	$\vee$-elim, 3, 6, 8
10	$(A \to B) \to B$	$\to$-intro, 2, 9

Commentaar: De regel $\vee$-elim blijft toch lastig. Ik heb schrikbarend veel mensen uit $A \vee B$ gewoonweg B zien concluderen! Dat is natuurlijk onzin: als ik weet dat $A \vee B$ waar is, mag ik niet concluderen dat B waar is, want misschien is A wel waar en B onwaar; dan is de disjunctie nog steeds waar. Er is maar één manier om een disjunctie te gebruiken, ofwel te *elimineren*: als je in beide gevallen een bepaalde formule kunt afleiden, mag je de disjunctie 'verwijderen,' en in plaats ervan die formule concluderen. In dit geval is dat het geval met de conclusie B, die in regel 9 wordt geconcludeerd o.g.v. $\vee$-elim: als A waar is, dan is, vanwege de andere premisse $A \to B$, ook B waar, en als B waar is, is B sowieso waar.

In het algemeen waren er veel mensen met 0 punten voor deze vraag, velen lijken zodra ze een Fitch opgave zien gewoon niet te weten hoe ze moeten beginnen, en hoe het werken met de Fitch regels eigenlijk werkt. Ik zie een Fitch afleiding als een puzzel: de premissen zijn de stukjes, en met de regels kun je uit bestaande puzzelstukjes nieuwe puzzelstukjes maken. Uiteindelijk moet je het ontbrekende stukje (de conclusie) kunnen construeren met de Fitch regels. Meestal is al veel gegeven door de vorm van de premissen en de conclusie, zo ook in dit geval. De conclusie is bijvoorbeeld een implicatie dus die zul je moeten introduceren: open een hypothese-interval met het antecedent als hypothese (2) en leidt daarbinnen het consequent af (9). De premisse kun je alleen maar elimineren, in dit geval is de premisse een disjunctie, dus dat kan alleen maar met een gevalsonderscheid. Op dit punt in de afleiding is alles behalve regels 5, 6 en 7 ingevuld (zie de deelafleiding hieronder), en merk daarbij op dat we **nog niks slims hebben hoeven doen**: alles wat we tot nu toe hebben gedaan is *gedicteerd* door de vorm van de premisse en de conclusie!

$A \vee B$	hypothese 1
$A \to B$	hypothese 2
$A \vee B$	rei, 1
A	hypothese 3
	⟨ nog in te vullen ⟩
B	hypothese 4
	⟨ nog in te vullen ⟩
	⟨ nog in te vullen ⟩
B	$\vee$-elim
$(A \to B) \to B$	$\to$-intro

We hoeven alleen nog maar te bedenken welke formule we in zowel geval A als geval B gaan afleiden (waarbij we het antecedent $A \to B$ van de conclusie mogen gebruiken), waarbij we weten dat we uiteindelijk op B moeten uitkomen. Dat is in dit geval niet meer moeilijk: dat moet gewoon formule B zijn: in het geval A met behulp van het antecedent van de conclusie, dat we hebben aangenomen, en in het geval B rechtstreeks.

ii. (10 punten) $\neg(A \wedge C), C, A \wedge \neg B \vdash D$.

Antwoord:

1	$\neg(A \wedge C)$	hypothese 1
2	C	hypothese 2
3	$A \wedge \neg B$	hypothese 3
4	$\neg D$	hypothese 4
5	A	hypothese 5
6	C	rei, 2
7	$A \wedge C$	$\wedge$-intro, 4, 5
8	$\neg(A \wedge C)$	rei, 1
9	$\neg A$	$\neg$-intro, 4, 6, 7
10	$A \wedge \neg B$	rei, 3
11	A	$\wedge$-elim, 10
12	$\neg\neg D$	$\neg$-intro, 4, 9, 11
13	D	$\neg$-elim, 12

Commentaar: De verdeling van het aantal studenten per totaalaantal punten voor zowel deze opgave als die bij 4.a.i is duidelijk bi-modaal: in beide gevallen haalde meer dan de helft van de studenten of 0 of 10 punten (in beide gevallen meer 0 dan 10 overigens).
De afleiding kon trouwens, zoals een aantal van jullie ontdekte, korter dan ik hem hierboven geef. Je kunt gewoon na regel 4 gelijk A en C afleiden voor $A \wedge C$, en dan de contradictie met $\neg(A \wedge C)$ opvoeren om $\neg\neg D$ te kunnen afleiden.

(b) (10 bonus punten) Geef de corresponderende metabewering die hoort bij je redenering van vraag 1.a.ii, dus inclusief jouw formule die de redenering **geldig** maakt:

$\neg(p \wedge r), \neg(p \to q)$, ⟨jouw formule hier⟩ $\vdash q \vee s$.

Bewijs nu in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch deze metabewering. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.

Antwoord: Ik geef hier het bewijs van de metabewering waarbij ik de tweede van de beide mogelijkheden die ik bij 1.a.ii noemde gebruik:

$$\neg(p \wedge r), \neg(p \rightarrow q), p \wedge (q \wedge r) \vdash q \vee s.$$

1	$\neg(p \wedge r)$	hypothese 1
2	$\neg(p \rightarrow q)$	hypothese 2
3	$p \wedge (q \wedge r)$	hypothese 3
4	$\neg(q \vee s)$	hypothese 4
5	$p \wedge (q \wedge r)$	rei, 3
6	p	$\wedge$-elim, 5
7	$q \wedge r$	$\wedge$-elim, 5
8	r	$\wedge$-elim, 7
9	$p \wedge r$	$\wedge$-intro, 6, 8
10	$\neg(p \wedge r)$	rei, 1
11	$\neg\neg(q \vee s)$	$\neg$-intro, 4, 9, 10
12	$q \vee s$	$\neg$-elim, 11

Een andere mogelijkheid is een afleiding te maken waarbij ik de eerste formule bij 1.a.ii gebruik:

$$\neg(p \wedge r), \neg(p \rightarrow q), (p \rightarrow s) \vee (q \wedge r) \vdash q \vee s.$$

1	$\neg(p \wedge r)$	hypothese 1
2	$\neg(p \rightarrow q)$	hypothese 2
3	$(p \rightarrow s) \vee (q \wedge r)$	hypothese 3
4	$p \rightarrow s$	hypothese 4
5	$\neg p$	hypothese 5
6	p	hypothese 6
7	$\neg q$	hypothese 7
8	p	rei, 6
9	$\neg p$	rei, 5
10	$\neg\neg q$	$\neg$-intro, 7, 8, 9
11	q	$\neg$-elim, 10
12	$p \rightarrow q$	$\rightarrow$-intro, 6, 11
13	$\neg(p \rightarrow q)$	rei, 2
14	$\neg\neg p$	$\neg$-intro, 5, 12, 13
15	p	$\neg$-elim, 14
16	s	$\rightarrow$-elim, 4, 15
17	$q \vee s$	$\vee$-intro, 16
18	$q \wedge r$	hypothese 8
19	q	$\wedge$-elim, 18
20	$q \vee s$	$\vee$-intro, 19
21	$q \vee s$	$\vee$-elim, 3, 17, 20

Merk op dat, *ongeacht* welke formule je bij 1.a.ii hebt gegeven, als hij de redenering van 1.a.i geldig maakt, er in Fitch een afleiding van de corresponderende metabewering is te geven.

Commentaar: 17 van de 67 hebben de bonus geprobeerd, 5 daarvan hebben de volle 10 punten behaald.

Ook deze afleiding kon veel simpeler dan hierboven—dat is het risico van het publiceren van uitwerkingen voordat ik het tentamen heb nagekeken, maar de afleiding hierboven klopt wel—ontdekte ik bij het nakijken van jullie soms erg inventieve afleidingen. Wanneer je bijvoorbeeld een formule als $p \land (q \land r)$ had gekozen, of wanneer je zowel een propositievariabele als zijn negatie als conjunct in je formule had opgenomen.

1	$\mid \underline{\neg(p \land r)}$	hypothese 1
2	$\mid \; \mid \underline{\neg(p \to q)}$	hypothese 2
3	$\mid \; \mid \; \mid \underline{p \land (q \land r)}$	hypothese 3
4	$\mid \; \mid \; \mid q \land r$	$\land$-elim, 3
5	$\mid \; \mid \; \mid q$	$\land$-elim, 4
6	$\mid \; \mid \; \mid q \lor s$	$\lor$-intro, 5

Hierbij heb je de rest van de premissen helemaal niet nodig, omdat de nieuw toegevoegde premisse alleen waar is als $v(p) = v(q) = v(s) = 1$ en dan is de conclusie $q \lor s$ ook waar.

5. **Verzamelingen**

(a) (6 punten) Bepaal van de volgende bewering of hij waar of onwaar is. Als je denkt dat hij waar is, geef een verzameling A die aan deze voorwaarde voldoet. Als je denkt dat hij niet waar is, bewijs dan dat zo'n verzameling A niet kan bestaan.

Er bestaat een verzameling A zodat $\mathscr{P}(A) = \emptyset$, waar $\mathscr{P}(A)$ de machtsverzameling van A is.

Antwoord: Deze bewering is niet waar, en we kunnen dat bijvoorbeeld als volgt bewijzen.

Bewijs. Voor elke verzameling geldt dat hij element is van zijn eigen machtsverzameling, aangezien voor elke verzameling X geldt, dat voor alle elementen van X geldt dat ze element van X zijn, en dus dat X deelverzameling van X is (en dus element van de machtsverzameling van X). Voor elke verzameling X geldt dus dat de machtsverzameling van X tenminste 1 element bevat, en dus niet gelijk kan zijn aan $\emptyset$. QED

Overigens geldt ook voor elke verzameling X, dat de lege verzameling element is van de machtsverzameling van X, wat een variant geeft van bovenstaand bewijs. Een alternatief bewijs verloopt als volgt, uit het ongerijmde.

Bewijs. Stel dat er wel een verzameling A bestaat zodat $\mathscr{P}(A) = \emptyset$. Deze verzameling heeft $n \geq 0$ elementen. Het aantal elementen in $\mathscr{P}(A)$ is 2^n en voor $n \geq 0$ geldt $2^n \geq 1$. Dit is in tegenspraak met de aanname dat $\mathscr{P}(A) = \emptyset$, want de lege verzameling heeft 0 elementen. De aanname dat de gevraagde verzameling A bestaat is dus onjuist, A bestaat niet. QED

Commentaar: Nog bijna de helft van jullie heeft hier geantwoord dat $A = \emptyset$ de gevraagde verzameling is. Na de bewijzen hierboven hoef ik niet meer uit te leggen waarom dat niet zo is, maar kan ik volstaan met de constatering dat dit zorgwekkend is.

(b) Zij gegeven de verzamelingen C en D in universum U. Bepaal of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Als je denkt dat een bewering waar is, geef er een bewijs voor. Als je denkt dat een bewering onwaar is, geef een tegenvoorbeeld in de vorm van specifieke verzamelingen, en beargumenteer hoe je tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.

i. (7 punten) Als $C \subseteq D^c$ dan $D \not\subseteq C^c$.

Antwoord: De bewering is onwaar. Een tegenvoorbeeld wordt gevormd door de verzamelingen $C = \{1\}$ en $D = \{2\}$ in universum $U = \{1, 2\}$. Voor deze verzamelingen geldt dat $D^c = \{1\}$ en dat $C^c = \{2\}$. Dus geldt wel dat $C \subseteq D^c$, maar niet dat $D \nsubseteq C^c$, want D is *wel* deelverzameling van C^c.
Commentaar: Deze vraag is goed gemaakt, meer dan de helft heeft de volle 7 punten gescoord. Ik zag veel simpele tegenvoorbeelden als hierboven, wat nog het meeste mis ging waren tegenvoorbeelden in de vorm van een Venn diagram. Een tegenvoorbeeld voor een stelling over verzamelingen bestaat uit *specifieke* verzamelingen, bijvoorbeeld $A = \{0, 1\}$ of $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$ of zo, samen met een *argumentatie* waarom die verzamelingen maken dat de stelling onwaar is. In het geval van een implicatie zoals in deze vraag, moeten dus die verzamelingen het antecedent waar maken, en het consequent onwaar, want dat is de enige manier waarop een implicatie onwaar is.

ii. (7 punten) Als $C \nsubseteq D$ dan $D^c \nsubseteq C^c$.

Antwoord: Deze bewering is waar.

Bewijs. We bewijzen de contrapositie: als $D^c \subseteq C^c$, dan $C \subseteq D$. Stel dus dat $D^c \subseteq C^c$. We moeten nu bewijzen dat $C \subseteq D$. Neem dus een willekeurig element uit C; daarvoor moeten we bewijzen dat het ook element is van D. Dit doen we uit het ongerijmde, dus stel dat het element van C ***géén*** element van D is, dan is het dus element van D^c. Volgens onze aanname is het dan ook element van C^c. Maar dat is in tegenspraak met het feit dat we een (willekeurig) element uit C hebben genomen. De aanname dat dit element van C géén element van D is, kan dus niet waar zijn, dus het is *wel* element van D. Aangezien we een willekeurig element van C hadden genomen, geldt dit voor alle elementen van C, en geldt dus $C \subseteq D$. QED

Commentaar: Er is niemand opgekomen om de contrapositie van deze implicatie te bewijzen, hoewel dat erg handig is, omdat je gelijk van beide $\nsubseteq$s af bent. Hoe dan ook, een direct bewijs van de implicatie is ook mogelijk, maar gaat anders dan velen van jullie dachten. Wat vooral fout ging was dat veel mensen dachten dat de aanname $C \nsubseteq D$ equivalent is met $C \subseteq D^c$, maar dat is niet waar: een verzameling C is niet altijd deelverzameling van ofwel D ofwel D^c, want C kan ook overlappen met D, en is dan deelverzameling van D noch D^c. De uitspraak $C \nsubseteq D$ zegt dat niet alle elementen van C in D zitten, dus $\neg\forall x(x \in C \rightarrow x \in D)$, terwijl de uitspraak $C \subseteq D^c$ zegt dat alle elementen van C niet in D zitten, dus $\forall x(x \in C \rightarrow \neg(x \in D))$. Laat de boommethode maar eens los op de uitspraak $\neg\forall x(x \in C \rightarrow x \in D) \models \forall x(x \in C \rightarrow \neg(x \in D))$ en je vindt gegarandeerd open takken. De bewering met deze verkeerde premisse (als $C \subseteq D^c$, dan $D^c \nsubseteq C^c$) is trouwens helemaal niet waar; een tegenvoorbeeld wordt bijvoorbeeld gevormd door $C = \{0\}$ en $D = \{1\}$ in universum $U = \{0, 1\}$, of nog minimaler: $C = D = \emptyset$ in universum $U = \{1\}$. (In het algemeen: er moet een element in het universum bestaan dat niet in C zit, het mag in D zitten, maar dat hoeft niet.)
Hoe dan ook, als $C \nsubseteq D$ waar is, geldt niet—zoals velen dus dachten—voor elke *willekeurige* $x \in C$ dat hij niet in D zit, maar het is wel zo dat er dan (tenminste) een $x \in C$ moet bestaan die niet in D zit. Over die x moet je bewijs gaan.

Bewijs. Stel $C \nsubseteq D$, dus er bestaat een $x \in C$ die niet in D zit. Noem dit element van C voor het gemak a. a zit dus in D^c en in C, dus niet in C^c. Er geldt dus niet voor alle $x \in D^c$ dat ze in C^c zitten (want dit geldt in elk geval niet voor a), dus geldt $D^c \nsubseteq C^c$. QED

Ik zag ook wel bewijzen van het consequent uit het ongerijmde.

Bewijs. Stel $C \nsubseteq D$, dus er bestaat een $x \in C$ die niet in D zit. Noem dit element van C voor het gemak a. Stel nu dat $D^c \subseteq C^c$, dus dat voor alle x geldt dat als $x \in D^c$, dan $x \in C^c$. Neem nu element $a \in D^c$, dan moet gelden $a \in C^c$, maar we weten dat $a \in C$, dus we hebben een contradictie. Er kan dus niet voor alle x gelden dat als $x \in D^c$, dan $x \in C^c$, oftewel $D^c \nsubseteq C^c$. QED

Einde tentamenopgaven