

Kansrekening en statistiek
WI2211TI-deel I
1 november 2012, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Een formuleblad is niet toegestaan.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd twee van de drie alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen en aan te strepen.

1. Gebeurtenis A is onafhankelijk van gebeurtenis B als

- a. $P(B | A) = P(A)$
- b. $P(B | A) = P(B)$
- c. $P(A | B) = P(B)$

2. De stochast X heeft kansdichtheid

$$f(x) = \frac{3}{16}x^2 \quad \text{voor } -2 \leq x \leq 2$$

en $f(x) = 0$ elders. Dan is $P(|X| \geq 1)$ gelijk aan

- a. $\frac{5}{16}$
- b. $\frac{7}{16}$
- c. $\frac{7}{8}$

3. Een systeem bestaat uit onderdelen A en B. De kans dat onderdeel A kapot gaat is 0.1. De kans dat onderdeel B kapot gaat is 0.2. Als B kapot gaat, dan is de kans dat A kapot gaat 0.4. Wat is de kans dat precies één van de 2 onderdelen kapot gaat?

- a. 0.08
- b. 0.2
- c. 0.14

4. Beschouw de volgende beweringen voor stochasten X en Y .

A Als X en Y onafhankelijk zijn, dan geldt $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

B Als X en Y ongecorreleerd zijn (dat wil zeggen $\text{Cov}(X, Y) = 0$), dan geldt $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Welke van deze beweringen zijn waar?

- a. alleen A
- b. alleen B
- c. beide

5. De onafhankelijke stochastische variabelen X en Y hebben beide een exponentiële verdeling met parameter 1. Dan is $P(X > 1, Y \geq 2)$ gelijk aan

- a. e^{-3}
- b. e^{-2}
- c. $e^{-2} + e^{-1}$

6. Een ijscoman staat met zijn kar langs de kant van de weg. De momenten waarop iemand stopt om een ijsje te kopen (eentje tegelijk) vormen een Poisson proces met intensiteit 7 per uur. Een ijsje kost 2 Euro. Noem de (bruto) inkomsten van een 8-urige werkdag Y . Dan is de variantie van Y (ongeveer) gelijk aan:

- a. 56
- b. 112
- c. 224

7. Dertien studenten stappen in een lift, die maximaal 1200 kg kan vervoeren. Stel dat we de dertien gewichten modelleren als onafhankelijke $N(90, 40)$ stochasten. Wat is de kans dat de lift overbelast is?

a. 0.09 b. 0.24 c. 0.47

8. Zelfde kontekst als het vorige probleem, maar bij nader inzien gebruiken we als verdeling liever de $U(75, 105)$. Wat is de kans dat de lichtste van de 13 minder weegt dan 80 kilo?

a. 0.1 b. 0.6 c. 0.9

9. Laat X een Bernoulli variabele zijn, d.w.z. voor een p met $0 \leq p \leq 1$ geldt er dat

$$X = \begin{cases} 1 & \text{met kans } p \\ 0 & \text{met kans } 1 - p. \end{cases}$$

Dan is de verwachting van $K = \sin(\pi X/2)$ gelijk aan:

a. p b. $\sin(\pi p/2)$ c. 0

10. Laat gegeven zijn dat $F(x) = P(X \leq x)$ de verdelingsfunctie is van de stochast X , en dat $G(x) = P(Y \leq x)$ de verdelingsfunctie is van de stochast Y . Laat verder gegeven zijn dat X en Y onafhankelijk zijn. Dan is de verdelingsfunctie van $Z = \min\{X, Y\}$ gelijk aan:

a. $\min\{F(x), G(x)\}$
b. $1 - F(x)G(x)$
c. $F(x) + G(x) - F(x)G(x)$

11. De stochast U is $U(0, 1)$ verdeeld. Bereken de kansdichtheid $f(x)$ van $X = 1/U$ voor $x > 1$.

a. $\frac{1}{x}$ b. $\frac{1}{x^2}$ c. $1 - \frac{1}{x}$

12. Op een verjaardagsfeestje verdelen we 14 snoepjes (van hetzelfde type) onder 10 kinderen. Het aantal manieren waarop we de snoepjes onder de kinderen kunnen verdelen is gelijk aan

a. $\binom{23}{10}$ b. $\binom{24}{9}$ c. $\binom{23}{9}$

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Stel dat bits worden verzonden over een communicatiekanaal. Met kans 0.7 wordt een 1 verzonden (en dus met kans 0.3 een 0). Door storingen wordt het signaal niet altijd correct ontvangen. In 90% van de gevallen gaat het echter goed. Dat wil zeggen, als een 1 verzonden wordt, dan wordt ook een 1 ontvangen, en als een 0 verzonden wordt, dan wordt ook een 0 ontvangen.

Definieer de gebeurtenissen

$$A = \{\text{een 1 wordt ontvangen}\}, \quad B = \{\text{een 1 wordt verzonden}\}.$$

- a. Eén bit wordt verzonden. We zijn geïnteresseerd in de kans dat er een 0 verzonden is gegeven dat we een 1 ontvangen. Druk deze kans uit in A en B .
- b. Bereken de kans waarin we geïnteresseerd zijn bij onderdeel (a) met behulp van Bayes' regel.
- c. Stel nu dat we 1024 bits verzenden. Definieer

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{als de } i\text{-de bit incorrect wordt ontvangen} \\ 0 & \text{als de } i\text{-de correct wordt ontvangen} \end{cases},$$

zodat

$$T = \sum_{i=1}^{1024} Y_i$$

het totaal aantal incorrect ontvangen bits geeft. Benader de kans dat minder dan 100 van de bits incorrect ontvangen worden met behulp van de centrale limietstelling.

2. Gegeven is de verdelingsfunctie van een discrete stochastische variabele X :

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{voor } a < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{voor } 0 \leq a < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{voor } \frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{4} \\ 1 & \text{voor } a \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

- a. Geef de kansmassafunctie van X .
 - b. Bereken de verwachting van X .
3. Gegeven is de verdelingsfunctie $F(x) = 0$ voor $x < 0$, en

$$F(x) = 1 - e^{-5x^2} \quad \text{voor } x \geq 0.$$

Laat zien hoe je met behulp van een $U(0,1)$ variabele U uit de stochast Z met de bovenstaande verdelingsfunctie kunt simuleren.

Puntenverdeling bij open vragen:

Opgave:	1a	1b	1c	2a	2b	3
Punten:	1	2	2	2	1	2

Bepaling van het eindcijfer: Bij de berekening van het eindcijfer wordt een apart cijfer berekend voor het meerkeuze- en open-vragen-deel. Bij het meerkeuzedeel zal een correctie voor gokken worden toegepast. Het eindcijfer is een gewogen gemiddelde van de twee verkregen cijfers, waarbij het meerkeuze-deel voor $2/3$ en het open-vragen-deel voor $1/3$ meetelt.
