

Kansrekening en statistiek  
WI2211TI / WI2105IN–deel 2  
12 april 2012, 14.00–16.00 uur

**VOOR WI2211TI:** Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Een formuleblad is niet toegestaan.

**VOOR WI2105IN:** Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Een formuleblad wordt uitgereikt.

**Toelichting:** In het algemeen zijn niet altijd twee van de drie alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen en aan te strepen.

1. In een rapport staat een 95% betrouwbaarheidsinterval  $(1.6; 7.8)$  voor de parameter  $\mu$  van een  $N(\mu, \sigma^2)$ -verdeling. Het interval is gebaseerd op 16 waarnemingen, geconstrueerd met behulp van het gestudentiseerd gemiddelde. Het gemiddelde van de dataset is gelijk aan:
  - a. 5.4
  - b. 4.7
  - c. Voor het beantwoorden van de vraag moeten we de waarde van de  $s_n$  kennen.

2. Stel  $X_1, X_2, \dots, X_n$  is een steekproef uit een uniforme verdeling op het interval  $[-\theta, \theta]$ , met  $\theta$  onbekend. Voor welke waarde van  $a$  is

$$T = \frac{a}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$$

een zuivere schatter voor  $2\theta^2$ ?

- a.  $a = 3$                       b.  $a = 6$                       c.  $a = 12$

3. Een steekproef uit een Poissonverdeling levert zes keer een 0, drie keer een 1 en een keer een uitkomst waarvan alleen bekend is dat deze groter dan of gelijk aan 2 is. De likelihoodfunctie wordt - op eventueel een constante na - gegeven door

a.  $\mu^3 e^{-9\mu} (1 - e^{-\mu} - \mu e^{-\mu})$

b.  $\frac{\mu^5}{2} e^{-10\mu}$

c.  $e^{-6\mu} + \mu^3 e^{-3\mu} + \frac{\mu^2 e^{-\mu}}{2}$

4. Stel dat  $X_1, X_2, \dots, X_n$  een steekproef is uit een normale verdeling met verwachting  $\mu$  en variantie  $\sigma^2$ . Beschouw de volgende beweringen:

A Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu$  wordt smaller naarmate  $n$  groter wordt.

B Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu$  is breder dan het 99%-betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu$

Welke van deze beweringen zijn waar?

- a. Alleen A    b. Alleen B    c. A en B

5. Stel dat  $X_1, X_2, \dots, X_n$  een steekproef is uit een normale verdeling met verwachting  $\mu$  en variantie 1. We toetsen de nulhypothese  $\mu = 0$  tegen de alternatieve hypothese  $\mu > 0$ . We

nemen als toetsingsgrootheid  $T = \bar{X}_n$  en als kritiek gebied  $[1, \infty)$ . De kans op een type 2 fout als  $\mu = 1$ , is gelijk aan:

- a. 0.1                                      b. 0.5                                      c. 0.67

6. Vervolg op voorgaande opgave. Stel dat voor een zekere dataset we de waarde  $t = 1$  krijgen (dus  $t$  is een realisatie van  $T$ ). Als  $n = 3$ , dan wordt de  $p$ -waarde voor deze toets gegeven door

- a. 0.159                                      b. 0.001                                      c. 0.042

7. Uit een verzameling objecten (bijv. tanks) genummerd 1 tot en met  $K$  worden *met* teruglegging 20 objecten getrokken. We willen toetsen  $H_0 : K = 1000$  tegen  $H_1 : K < 1000$ , met het hoogste rangnummer  $M$  van onze steekproef als toetsingsgrootheid. We vinden als realisatie voor  $M$  de waarde 800. De  $p$ -waarde van deze uitkomst is:

- a. 0.012                                      b. 0.041                                      c. 0.015

8. Beschouw het 2 steekproeven probleem (dwz. het toetsen op verschil tussen de verwachtingen in 2 populaties); MIPS hoofdstuk 28). Welke van de volgende beweringen zijn waar?

A Het verdient altijd de voorkeur om de gepoolde variantieschatting te gebruiken in plaats van de ongepoolde variantieschatting.

B Bij gebruik van de ongepoolde variantieschatting heeft de toetsingsgrootheid een  $t$ -verdeling, waarbij het aantal vrijheidsgraden gelijk is aan het totaal aantal waarnemingen minus 2.

- a. Geen                                      b. Alleen A                                      c. Alleen B

9. Een enquête op een ja/nee vraag levert 30 keer "ja" en 70 keer "nee". Een schatting voor  $p$ , "de kans op ja", is  $\hat{p} = 0.3$ .

Op grond van de centrale limietstelling wordt een 95 % betrouwbaarheidsinterval voor  $p$  (grofweg) gegeven door

- a.  $[0.15, 0.45]$                                       b.  $[0.21, 0.39]$                                       c.  $[0.26, 0.34]$

10. Bij een schattingsprobleem voor een parameter  $p$  beschikken we over  $X_1$  die binomiaal verdeeld is met parameters  $n = 100$  en  $p/2$  en  $X_2$  die binomiaal verdeeld is met parameters  $n = 150$  en  $2p/3$ . De schatters  $T_1 = X_1/50$  en  $T_2 = X_2/100$  zijn beide zuiver voor  $p$ . De relatieve efficiëntie (relative efficiency) van  $T_2$  ten opzichte van  $T_1$  is gelijk aan:

- a.  $\frac{9-6p}{2-p}$                                       b.  $\frac{2-p}{2-6p}$                                       c.  $\frac{6-3p}{3-2p}$

## Open vragen

**Toelichting:** Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Stel dat we binaire data  $x_1, \dots, x_n$  hebben. Dus iedere  $x_i$  is ofwel gelijk aan 1, ofwel gelijk aan 0. We vatten  $x_1, \dots, x_n$  op als realisaties van onafhankelijke stochasten  $X_1, \dots, X_n$  uit een Bernoulli verdeling met parameter  $p$ .
  - a. Laat zien dat de schatter  $S = \bar{X}_n$  zuiver is voor  $p$ .
  - b. Definieer  $T = X_2$ . Bereken de relatieve efficiëntie van  $S$  ten opzichte van  $T$ .
  - c. We schatten  $\theta = \text{Var}(X_1)$  door  $U = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$ . Leg uit waarom dit een redelijke schatter is.
  - d. Is  $U$  zuiver voor  $\theta$ ? Laat zien waarom wel of niet.  
*Hint:* Gebruik Jensen's ongelijkheid, of bereken de bias van  $U$ .
2. We gooien een onzuivere munt achtereenvolgens totdat we voor het eerst kop gooien. We herhalen dit experiment 3 keer (met dezelfde munt). De aldus verkregen data zijn:
  - eerste experiment: eerste keer kop bij de 3de worp,
  - tweede experiment: eerste keer kop bij de 3de worp,
  - derde experiment: eerste keer kop bij de 4de worp.

Noem  $p$  de kans op kop bij één keer gooien met de munt. Bereken de meest aannemelijke (maximum likelihood) schatting voor  $p$  op grond van de gegeven data.

3. **Alleen voor WI2105IN.** Voor een dataverzameling construeert men een histogram met cellen  $[0, 1]$ ,  $(1, 3]$ ,  $(3, 5]$ ,  $(5, 8]$ ,  $(8, 11]$ ,  $(11, 14]$  and  $(14, 18]$ . Gegeven zijn de waarden van de empirische verdelingsfunctie op de grenzen van de cellen:

| $t$ | $F_n(t)$ |
|-----|----------|
| 0   | 0        |
| 1   | 0.225    |
| 3   | 0.445    |
| 5   | 0.615    |
| 8   | 0.735    |
| 11  | 0.805    |
| 14  | 0.910    |
| 18  | 1.000    |

Geef aan in welke cel het 40ste percentiel van de dataverzameling ligt

4. **Alleen voor WI2105IN.** Stel dat we een dataset  $x_1, \dots, x_n$  modelleren als een realisatie van onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen  $X_1, \dots, X_n$ , elk met verwachting  $\mu$ . Geef aan hoe je met behulp van de empirische bootstrap de kans  $P(|\bar{X}_n - \mu| > 1)$  kunt benaderen.
5. **Alleen voor WI2211TI.** Beschouw een experiment waarin we de effectiviteit van 3 verschillende methoden onderzoeken. De scores zijn als volgt:

|          |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|
| Method A | 73 | 77 | 67 | 71 |
| Method B | 91 | 81 | 87 | 85 |
| Method C | 72 | 77 | 76 | 79 |

We gebruiken de  $F$ -toets om te toetsen of er een significant verschil is tussen de 3 methoden. We verkrijgen met behulp van een statistisch software pakket de volgende ANOVA-tabel:

```
> scores.aov <- aov(score ~ method, d)
```

```
> summary(scores.aov)
```

|           | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F)   |
|-----------|----|--------|---------|---------|----------|
| method    | 2  | 416.00 | 208.00  | 14.4    | 0.001568 |
| Residuals | 9  | 130.00 | 14.44   |         |          |

- Is er een significant verschil bij significantieniveau  $\alpha = 0.01$ ?
- De analyse is gebaseerd op de aanname dat alle verkregen scores realisaties zijn van onafhankelijke stochastische variabelen, elk met variantie  $\sigma^2$ . Geef een schatting voor  $\sigma$  op grond van de ANOVA-tabel.

---

Puntenverdeling bij open vragen:

|         |    |    |    |    |   |   |   |    |    |
|---------|----|----|----|----|---|---|---|----|----|
| Opgave: | 1a | 1b | 1c | 1d | 2 | 3 | 4 | 5a | 5b |
| Punten: | 1  | 1  | 1  | 1  | 3 | 1 | 1 | 1  | 1  |

**Bepaling van het eindcijfer:** Bij de berekening van het eindcijfer wordt een apart cijfer berekend voor het meerkeuze- en open-vragen-deel. Bij het meerkeuzedeel zal een correctie voor gokken worden toegepast. Het eindcijfer is een gewogen gemiddelde van de twee verkregen cijfers, waarbij het meerkeuze-deel voor  $2/3$  en het open-vragen-deel voor  $1/3$  meetelt.

---