

Kansrekening en statistiek
WI2211TI-deel I
4 november 2011, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.
Een formuleblad is niet toegestaan.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd twee van de drie alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen en aan te strepen.

1. We gooien 5 keer met een zuivere munt en zien precies 2 keer kop. Vervolgens gooien we totdat we voor het eerst weer een keer kop zien verschijnen. Dit blijkt 3 worpen te duren. De kans dat dit achtereenvolgens zo gebeurt is

a. $10(1/2)^8$ b. $(1/2)^8$ c. $3(1/2)^8$

2. Voor een stochastische variabele X is gegeven dat $E[X] = 3$ en $\text{Var}(X) = 1$. Dan is $E[2X^2]$ gelijk aan

a. 8 b. 16 c. 20

3. In een vaas zitten 5 lootjes, te weten

A B C D E.

We pakken drie lootjes zonder terugleggen. De kans dat het derde lootje C is, is gelijk aan

a. $1/5$ b. $1/3$ c. $1/10$

4. Stel dat X een uniforme verdeling heeft op $(-2, 1)$. Dan is het 80-ste percentiel gelijk aan

a. $2/5$ b. $4/5$ c. $-6/5$

5. Stel X en Y zijn onafhankelijke stochastische variabelen met een standaardnormale verdeling. Noteer de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling met Φ . Dus $\Phi(x) = P(X \leq x)$. Nu is $P(X + Y > 1)$ gelijk aan

a. $1 - \Phi(1/2)$ b. $1 - \Phi(\sqrt{2})$ c. $1 - \Phi(1/\sqrt{2})$

6. Stel dat stochastische variabelen X en Y onafhankelijk zijn; X is exponentieel verdeeld met parameter 1; en Y is exponentieel verdeeld met parameter 2. Dan is $P(\min(X, Y) > 2)$ gelijk aan

a. e^{-2} b. e^{-4} c. e^{-6}

7. Stel dat de stochastische variabele X kansdichtheid $f(x)$ heeft. Dan wordt de dichtheid van $\frac{1}{2}X$ gegeven door

a. $2f(2x)$ b. $\frac{1}{2}f(x/2)$ c. $\frac{1}{2}f(2x)$

8. Een set kaarten wordt geschud. De kans dat de op 1 na bovenste kaart harten vrouw is, is gelijk aan

a. $1/51$ b. $1/52$ c. $1/(51 \cdot 52)$

9. Stel X is de uitkomst van een worp met een zuivere dobbelsteen. Dan is de verwachting van $|X - 3|$ gelijk aan
- a. $1/2$ b. 0 c. 1.5
10. Zes personen staan op de begane grond voor de lift in een warenhuis met vijf verdiepingen. Ieder persoon kiest onafhankelijk van de andere personen de verdieping waar hij of zij heen wil gaan. We nemen aan dat elk van de verdiepingen dezelfde ‘kans’ heeft om door een willekeurige bezoeker gekozen worden. We voeren drie stochasten in:
- X : het aantal verschillende etages waar de zes personen heen willen.
 Y : het aantal personen dat naar de tweede etage wil.
 Z : de hoogste etage die wordt gekozen.
- Welk van de drie heeft een binomiale verdeling?
- a. X b. Y c. Z
11. Gegeven de rij onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, \dots$. Iedere X_i is uniform verdeeld op het interval $[-1, 1]$. Voor welke waarde van $a \in \mathbb{R}$ geldt
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^4 - a\right| > 0.0023\right) = 0.$$
- a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{2}{5}$ c. 0
12. Gegeven twee stochasten X en Y , met $\text{Var}(X) = 1/2$ en $\text{Var}(Y) = 2$. Verder geldt dat $\text{Cov}(X, Y) = -1/2$. De correlatie tussen $2X$ en Y is gelijk aan:
- a. $1/\sqrt{2}$ b. $-1/2$ c. $-1/\sqrt{2}$
13. Bij een server komen berichten binnen volgens een Poisson proces. De intensiteit van dit Poisson proces is 2 berichten per 3 minuten. Wat is de kans dat we na ontvangst van een bericht langer dan 20 seconden op een volgend bericht moeten wachten? (afgerond op 2 decimalen)?
- a. 0.22 b. 0.61 c. 0.80
14. Beschouw een systeem bestaande uit 3 waterpompen om een reactor de op lage temperatuur te houden. De 3 pompen falen onderling onafhankelijk. Iedere pomp heeft betrouwbaarheid (reliability) $R = 0.95$. De reactor is voldoende gekoeld als tenminste 2 van de 3 pompen werken. De reliability van dit systeem is gelijk aan
- a. 0.998 b. 0.993 c. 0.995
15. Gegeven de dataset $\{0.44, 2.40, 0.01, 2.47, 0.82, 1.66, 1.01, 0.09\}$. We maken een histogram met cellen $C_1 = [0, 0.25)$, $C_2 = [0.25, 2)$, $C_3 = [2, 3)$. De hoogte van het histogram in cel C_2 is gelijk aan
- a. 4 b. 0.5 c. 0.29

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Om een ronde tafel staan 6 stoelen. Er komen 4 mannen en 2 vrouwen binnen die op een willekeurige manier een stoel uitzoeken. Definieer de gebeurtenis A door “De twee vrouwen zitten naast elkaar” en B door “Er is een groepje van minstens drie mannen die naast elkaar zitten.”
 - a. Bepaal $P(A)$.
 - b. Gegeven is dat $P(B) = \frac{4}{5}$ (u hoeft dit niet na te gaan). Bereken $P(A | B)$.
2. Het Las Vegas equivalent van Bingo is Keno. Bij dit spel worden zonder terugleggen 20 ballen gepakt uit een bak met 80 ballen, genummerd 1 t/m 80. Een speler zet een dollar in op een nummer uit $\{1, 2, \dots, 80\}$. Als het gekozen nummer op één van de 20 gepakte ballen staat, dan krijgt hij 3 keer zijn inzet uitgekeerd. In het andere geval verliest de speler zijn dollar.
 - a. Geef de kansverdeling van W , de winst bij 1 keer het spel spelen.
 - b. Bereken de verwachting en variantie van W .
 - c. Stel dat we het spel 50 keer spelen. Laat W_i de winst zijn bij het i -de spel. Benader met behulp van de centrale limietstelling de kans dat de totale winst na 50 keer spelen, $S = \sum_{i=1}^{50} W_i$, positief is.
Indien je het antwoord op vragen a en b niet weet, neem dan $E[W] = -\frac{1}{2}$ en $\text{Var}(W) = 1.9$.
3. Gegeven is de stochastische variabele X met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} & \text{als } x \in (1, 2] \\ 0 & \text{voor alle andere waarden van } x \end{cases}$$

- a. Bereken de verdelingsfunctie F van X . Dus: bereken de $F(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
- b. Geef aan hoe je een realisatie van X kunt genereren met behulp van een toevalsgetal u . Maak onderscheid tussen de gevallen $u \in (0, 1/2)$ en $u \in [1/2, 1)$.

Puntenverdeling bij open vragen:

Opgave:	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b
Punten:	1	2	1	2	3	2	2

Antwoorden multiple choice:

1 a. $\binom{5}{2}(1/2)^8 = 10(1/2)^8$.

2 c. $E[2X^2] = 2E[X^2] = 2(\text{Var}(X) + (E[X])^2) = 2(1 + 3^2) = 20$.

3 a. De marginale kansen zijn bij zonder- en met terugleggen gelijk. Hieruit volgt direct dat de gevraagde kans gelijk is aan $1/5$.

4 a. Los op: $\frac{1}{3}(x + 2) = 0.8$.

5 c. De som $X + Y$ is normaal verdeeld met verwachting nul en variantie 2. Dus

$$P(X + Y > 1) = P\left(\frac{X + Y}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(1/\sqrt{2}).$$

6 c. Door onafhankelijkheid; is dit gelijk aan $P(X > 2)P(Y > 2) = e^{-2}e^{-2} = e^{-4}$.

7 a. $P(X/2 \leq x) = P(X \leq 2x)$; differentieer nu (vergeet de kettingregel niet).

8 b. In totaal zijn er $52!$ permutaties. Bij $51!$ permutaties is de op 1 na bovenste kaart harten vrouw.

9 c. $|X - 3|$ neemt de waarden 1 en 2 aan met kans $1/3$. De waarden 0 en 3 worden aangenomen met kans $1/6$. Dus

$$E[|X - 3|] = (1 + 2)\frac{1}{3} + (0 + 3)\frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}.$$

10 b. X en Z kunnen niet de waarde nul aannemen, dus hebben zeker geen binomiale verdeling. Y heeft dat wel: het 'experiment' op een knop in de lift drukken, met als 'succes' drukken op de knop van de 2de etage (met kans $1/5$), wordt zes keer herhaald. Het aantal 'successen', dus Y , heeft dan een $\text{Bin}(6, 0.2)$ verdeling.

11 a. Volgens de law of large numbers geldt dat

$$a = E[X_1^4] = \int_{-1}^1 x^4 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}.$$

12 b. $\text{Cov}(2X, Y) = -2\text{Cov}(X, Y) = -1$. $\text{Var}(2X) = 4\text{Var}(X) = 2$. Dus

$$\rho = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = -1/2.$$

13 c. De intensiteit per minuut is $\lambda = 2/3$. De tussenaankomst-tijden bij een Poisson proces zijn Exponentiël verdeeld met parameter $2/3$. Dus de gevraagde kans is $e^{-(2/3)1/3} = e^{-2/9} \approx 0.80$.

14 b. Het aantal pompen dat werkt, noem dit X , is $\text{Bin}(3, 0.95)$ verdeeld. Gevraagd is

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.05^3 - 3(0.95)(0.05)^2 \approx 0.993.$$

15 c. Oppervlakte van histogram in een cel = datafractie in de cel = $4/8 = 1/2$. De breedte van het interval is 1.75. Dus de hoogte moet gelijk zijn aan $0.5/1.75 \approx 0.29$.

Antwoorden open vragen:

- 1 a. Neem de eerste vrouw als referentiepunt: van de overige 5 plaatsen zijn er 2 *naast* haar.
Dus $P(A) = \frac{2}{5}$.

- b. $P(B) = P(\text{vrouwen zitten niet tegenover elkaar}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
Omdat $A \subset B$ geldt $A \cap B = A$ en dus $P(A|B) = P(A)/P(B) = \frac{1}{2}$.

- 2 a.

$$W = \begin{cases} 2 & \text{met kans } \frac{1}{4} \\ -1 & \text{met kans } \frac{3}{4} \end{cases}$$

- b.

$$E[W] = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$E[W^2] = 2^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{3}{4} = 1 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\text{Var}(W) = 1 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 1 \cdot \frac{11}{16} \approx 1.69$$

- c. S is bij benadering normaal verdeeld met verwachting $-50/4 = -12.5$ en variantie $50 \cdot 1 \cdot \frac{11}{16} = 84 \frac{3}{8}$. De gevraagde kans is dus (standaardiseren)

$$P\left(Z > 12.5 / \sqrt{84 \frac{3}{8}}\right) = P(Z > 1.36) \approx 0.087.$$

Met $E[W] = -\frac{1}{2}$ en $\text{Var}(W) = 1.9$ wordt het antwoord

$$P\left(Z > 25 / \sqrt{50 \cdot 1.9}\right) = P(Z > 2.56) \approx 0.0052.$$

- 3 a.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

- b. Als $u \in (0, 1/2)$, dan $\frac{1}{2}x^2 = u$ en dus $x = \sqrt{2u}$. Als $u \in [1/2, 1)$, dan $\frac{1}{2}x = u$ en dus $x = 2u$.