TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

Tentamen IN1305-A
Fundamentele Informatica 1: Logica

26 oktober 2009, 9.00–12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 100.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 20 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = 1 + \frac{9}{100} \cdot (\text{aantal punten})$.
- Wil je op het eerste vel je **TurningPoint ID** schrijven?
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Evenmin is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en *schrijf leesbaar* (**gebruik eerst kladpapier**).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan interpretatie over, maar wees duidelijk in wat je bedoelt.
- Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. **Boommethode**
   (a) (4 punten) De boommethode maakt voor het vaststellen van de geldigheid van een redenering gebruik van de *negatie van de conclusie*. Leg uit waarom de boommethode in plaats daarvan niet de *conclusie* zelf gebruikt. Beargumenteer je antwoord volledig.
   (b) Toon met behulp van de boommethode aan of de volgende beweringen al dan niet waar zijn, en beargumenteer je antwoord. Als de bewering onwaar is, construeer dan een tegenvoorbeeld, en beargumenteer hoe dat tegenvoorbeeld de redenering ongeldig maakt. (Als je denkt dat de bewering bij vraag ii. ongeldig is, mag je tegenvoorbeeld in de vorm van een plaatje zijn.)
      i. (8 punten) $\models ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B)$, waar $A, B \in PROP$.
      ii. (8 punten) $\forall x \exists y (R(x,y) \rightarrow A(x)) \models \forall x (\exists y R(x,y) \rightarrow A(x))$, waar A een 1-plaatsig, en R een 2-plaatsig predicaatsymbool is.

2. **Fitch**
   Zij $A, B \in PROP$. Bewijs in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende metabeweringen. Vergeet niet elke regel een nummer en een verantwoording te geven.
   (a) (10 punten) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$.
   (b) (10 punten) $\vdash (A \rightarrow B) \vee A$.

3. **Verzamelingen**
   (a) (10 punten) Zij gegeven verzamelingen A, B en C in universum U. Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is, en beargumenteer je antwoord: als de bewering waar is, geef er een bewijs voor; als hij onwaar is, geef een tegenvoorbeeld in de vorm van verzamelingen A, B en C. Beargumenteer dan ook hoe je tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.
   Als $C \subseteq (A \cap B)^c$ dan $(A \cap B) \subseteq C^c$.
   (b) (10 punten) Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is en beargumenteer je antwoord.
   $\mathscr{P}(\emptyset) = \emptyset$, waar $\mathscr{P}$ het symbool voor de machtsverzameling is.

4. **Structurele Inductie**
   (a) Geef recursieve definities van de volgende functies.
      i. (4 punten) de functie $tc : F \rightarrow \mathbb{N}$ die aan elke formule $F \in PROP$ het aantal voorkomens van tweeplaatsige connectieven in F toekent.
      ii. (4 punten) de functie $h : F \rightarrow \mathbb{N}$ die aan elke formule $F \in PROP$ het aantal haakjes in F toekent. Volg hierbij de officiële syntaxis van de taal van de propositielogica $\mathcal{P}$ (waarin dus geen haakjes worden weggelaten).
   (b) (12 punten) Bewijs met structurele inductie dat voor alle $F \in PROP$ geldt $tc(F) = h(F)/2$.

5. **Metabeweringen**
   (a) Zij gegeven een redenering met nul of meer premissen. Beschouw de volgende 3 uitspraken:
      - de redenering is geldig,
      - de redenering is ongeldig,
      - we kunnen niets definitiefs zeggen over de geldigheid van de redenering.

   Welke van deze 3 uitspraken kan men in elk van de volgende gevallen (i. t/m v.) doen over de geldigheid van de gegeven redenering? Beargumenteer in alle gevallen je antwoord, want voor een antwoord zonder argumentatie krijg je geen punten.
      i. (2 punten) Eén van de premissen is een tautologie.
      ii. (2 punten) Sommige premissen zijn contradicties.
      iii. (2 punten) Alle premissen zijn tautologieën.
      iv. (2 punten) Géén van de premissen is een contingentie.
      v. (2 punten) De conclusie is een tautologie.
   (b) (10 punten) Zij $A, B \in PROP$. Bepaal of de volgende metabewering waar of onwaar is, en beargumenteer je antwoord: als de bewering waar is, geef er dan een bewijs voor; als hij onwaar is, geef een tegenvoorbeeld in de vorm van formules uit $PROP$ om voor A en B in te vullen. Beargumenteer dan ook hoe je tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.
   Als $\models A \rightarrow B$ dan (als $\models A$ dan $\models B$).

Einde tentamenopgaven